

# Analysis 4

Herrn. Sanku

21.4.09

## Topologische Vorbereitungen

Def: Ein topologischer Raum heißt metrisierbar, wenn seine Topologie durch seine Metrik induziert wird.

Satz metrisierbar  $\Rightarrow$  Hausdorff

$\Rightarrow$  jeder Punkt hat abzählbare Umgebungsbasis (Abzählbarkeitsaxiom)

$\Rightarrow$  jeder Teilraum ist auch metrisierbar

Def.  $x \in U$

offene Umgebungen von  $x$

$(U_i)_{i \in I}$  ist Umgebungsbasis von  $x$  falls für jede Umgebung

$U$  von  $x$  ein  $i \in I$  ex., s.d.  $U_i \subset U$  gilt

Def: Ein top. Raum erfüllt das Abzählbarkeitsaxiom, wenn seine Topologie eine abzählbare Basis besitzt.

Bsp.  $\bullet \mathbb{R}^n$  erfüllt 2.AA ( $B(x, \varepsilon)$  mit  $x \in \mathbb{Q}^n$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ )

$\bullet \mathbb{R}_{disc}$  erfüllt 2AA nicht

$\bullet \bigsqcup_{x \in \mathbb{R}} \mathbb{R}^n$  erfüllt 2AA nicht

$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{disc}$

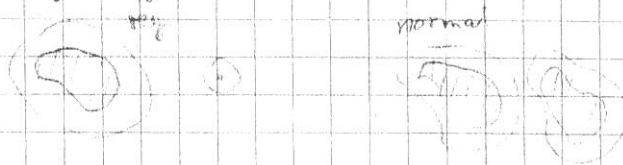
Def: Ein metrischer Raum heißt separabel, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt

Bsp.  $\bullet \mathbb{R}^n$  separabel  $\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$

$\bullet (\mathbb{R}, disc)$  nicht separabel

Satz: separabel  $\stackrel{?}{\Leftrightarrow}$  2.AA.

Def: Ein top. Raum heißt regulär (normal) wenn in ihm abgeschlossene Teilmengen von Punkten (abgeschlossenen Teilmengen) getrennt werden können



Satz: Ein metrischer Raum ist regulär und normal

Satz: Urysohn

Ein regulärer Hausdorffraum, der das 2. AA erfüllt ist metrisierbar

Def: Eine Überdeckung  $(U_i)_{i \in I}$  einer Menge  $X$  heißt lokal endlich, wenn für alle  $x \in X$  die Menge  $\{i \in I \mid x \in U_i\}$  endlich ist.

Def: Eine Teilüberdeckung von  $(U_i)_{i \in I}$  <sup>von X</sup> ist eine Überdeckung der Form  $(U_j)_{j \in J}$  mit  $J \subseteq I$ .

Def: Ein topologischer Raum heißt parakompakt, wenn ~~man aus~~ jeder offenen Überdeckung eine lokal endliche <sup>Verfeinerung</sup> ~~Teilüberdeckung~~ hat. ~~auswählen kann.~~ Verfeinerung:  $(V_j)_{j \in J}, \alpha: J \rightarrow I$  mit  $V_j \subseteq U_{\alpha(j)}, \forall j \in J$  <sub>offene Überdeckung</sub>

Satz: Ein parakompakter Hausdorffraum ist metrisierbar (Dieudonné)

Satz: Stone

Ein metrisierbarer Raum ist parakompakt.

parakompakt + Hausdorff  $\Leftrightarrow$  metrisierbar

Satz: normal, regulär, parakompakt, 2AA <sup>auf abgeschl. Teilmengen</sup> werden vererbt

Def: Eine der offenen Überdeckung  $(U_i)_{i \in I}$  von  $X$  untergeordnete Zerlegung der Eins ist eine Familie von Funktionen  $(\varphi_i)_{i \in I}$

mit 1)  $\varphi_i: X \rightarrow [0, 1]$  stetig

2) für alle  $x \in X$  ~~ist~~ <sup>ist</sup>  $\{i \in I \mid \varphi_i(x) \neq 0\}$  endlich

