Analysis 4

Topologische Vorbereitungen

Def: Ein topologischer Raum heißt metrisierbar, wenn seine Topologie durch seine Metrik induziert wird.

Satz: metrisierbar $\Rightarrow$ Hausdorff
$\Rightarrow$ jeder Punkt hat abzählbare Umgebungsbasis (1. Abzählbarkeitsaxiom)
$\Rightarrow$ jeder Teilraum ist auch metrisierbar

Def: $x \in U$
offene Umgebungen von x
$(U_i)_{i \in I}$ ist Umgebungsbasis von x falls für jede Umgebung U von x ein $i \in I$ ex., s.d. $U_i \subset U$ gilt

Def: Ein top. Raum erfüllt das 2. Abzählbarkeitsaxiom, wenn seine Topologie eine abzählbare Basis besitzt.

Bsp:
- $\mathbb{R}^n$ erfüllt 2. AA ($B(x, \varepsilon)$ mit $x \in \mathbb{Q}^n$, $\varepsilon \in \mathbb{Q}$)
- $\mathbb{R}_{disc}$ erfüllt 2AA nicht
- $\underbrace{\bigsqcup_{x \in \mathbb{R}} \mathbb{R}^n}_{= \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{disc}}$ erfüllt 2AA nicht

Def: Ein metrischer Raum heißt separabel, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt.

Bsp:
- $\mathbb{R}^n$ separabel $\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$
- $(\mathbb{R}, d_{disc})$ nicht separabel

Satz: separabel $\overset{?}{\Leftarrow}\Rightarrow$ 2. AA.

Def: Ein top. Raum heißt regulär (normal) wenn in ihm abgeschlossene Teilmengen von Punkten (abgeschlossenen Teilmengen) getrennt werden können

Satz: Ein metrischer Raum ist regulär und normal

Satz: ~~Urysohn~~

Ein regulärer Hausdorffraum, der das 2. AA erfüllt ist metrisierbar

Def: Eine Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ einer Menge X heißt lokal endlich, wenn für alle $x \in X$ die Menge $\{ i \in I \mid x \in U_i \}$ endlich ist.

Def: Eine Teilüberdeckung von $(U_i)_{i \in I}$ von X ist eine Überdeckung der Form $(U_j)_{j \in J}$ mit $J \subseteq I$.

Def: Ein topologischer Raum heißt parakompakt, wenn ~~man aus~~ jeder offenen Überdeckung eine lokal endliche Verfeinerung ~~Teilüberdeckung~~ hat. ~~auswählen kann~~ Verfeinerung: $\Big(\underbrace{(V_j)_{j \in J}}_{\text{offene Überdeckung}}, \alpha : J \to I \Big)$ mit $V_j \subseteq U_{\alpha(j)} \ \forall j \in J$

Satz: Ein parakompakter Hausdorffraum ist metrisierbar (Dieudonné)

Satz: Stone

Ein metrisierbarer Raum ist parakompakt.

parakompakt + Hausdorff $\Longleftrightarrow$ metrisierbar

auf abgeschl. Teilmengen

Satz: normal, regulär, parakompakt, 2AA werden vererbt

Def: Eine der offenen Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von X untergeordnete Zerlegung der Eins ist eine Familie von Funktionen $(\varphi_i)_{i \in I}$

mit 1) $\varphi_i : X \to [0,1]$ stetig

2) für alle $x \in X$ ist ~~mit~~ $\{ i \in I \mid \varphi_i(x) \neq 0 \}$ endlich