19.6.09

Funktionalanalysis

W, V endl. dim komplexe VR.

$A: W \to V$ linear, $v \in V$

Problem: $Ax = v$

$x \in W$ gesucht

- lösbar, wenn $v \in \mathrm{Im}(A)$

$V \xrightarrow{\pi} V/\mathrm{Im}(A) =: \mathrm{Coker}(A)$

$v \in \mathrm{Im}(A) \Leftrightarrow [v] = 0$ in $\mathrm{Coker}(A)$

das sind dim Coker (A) viele lin. Bedingungen

z.B. wähle Basis $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ von $\mathrm{Coker}(A)'$

Problem lösbar gdw. $\varphi_i(\pi(v)) = 0 \quad \forall i$

- wenn lösbar, dann hat Lösung L die Struktur $L = x_0 + \ker A$

wobei $x_0 \in W$ eine Lösung

L ist ein dim ker A - dim. affiner Raum

- $\dim \ker - \dim \mathrm{Coker} = \dim W - \dim V$

$=:$ index A

Bsp für unendl. dim

$P = \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid f(x + 2\pi) = f(x) \}$

$A: P \to P, \ Af = f'$

$Af = h$

$h \in \mathrm{Im}\, A, \quad h = g', \quad \int_0^{2\pi} h(u)\,du = g(2\pi) - g(0) = 0$

das ist die einzige Bed. für $h \in \mathrm{Im}\, A$

$\varphi: P \to \mathbb{C}$

$\varphi(h) = \int_0^{2\pi} h(u)\,du$

$Af = h$ lösbar, wenn $\varphi(h) = 0$

$f(v) = \int_0^v h(u)\,du + c$

$\ker A = \{\text{const. Fkt}\}$, $\dim \overset{\ker}{A} = 1$

$\dim \operatorname{Coker}(A) = 1$ (eine lin. Bed.)

$\Rightarrow$ index $A = 0$

- $\Delta = -\sum_i \partial_i^2$ nicht beschränkt

  $\Delta \quad C^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 2$

  Δ ist surj

  $\dim \ker \Delta = \infty$

  fällt aus der Theorie raus

- Sei V endl. dim. komplexer VR

  $A : V \to V$ lin.

  $\dot{v} = Av$, $v(0) = v_0 \in V$

  hat eind. Lsg.

  „formal" $v = e^{tA} v_0$

  mit $e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n A^n$ + Konvergenzbetrachtung

  $\langle , \rangle$ Skalarprodukt auf V

  A bzgl. $\langle , \rangle$ selbstadjungiert, d.h. $\langle Av, v' \rangle = \langle v, Av' \rangle$

  dann ex ONB $v_1, \dots, v_r$ aus Eigenvektoren

  in dieser Basis $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_r \end{pmatrix}$ mit $\lambda_i \in \mathbb{R}$

  $\Rightarrow e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{t\lambda_r} \end{pmatrix}$

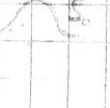
  $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}$, $\lambda_i \in U$

  $f(A) := \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f(\lambda_r) \end{pmatrix}$

  z.B. wenn 0 kein EW, dann $A^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_r^{-1} \end{pmatrix}$

  z.B. $f(x) = x^n \rightsquigarrow f(A) = A^n$ verträgl. mit Polynomen

- $\mathbb{R}^3$ Wärmeleitung



Temperaturverteilung zur Zeit $t = 0$

$\rho_0 \in C_c(\mathbb{R}^3)$

$\Rightarrow -\Delta \rho = \dot{\rho}$

$e^{-t\Delta} \rho_0 \overset{?}{=} \rho(t)$

$\rho(t) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ (Lösung liegt hier drin)

$\Delta : L^2(\mathbb{R}^3) \to L^2(\mathbb{R}^3)$ nicht auf ganz L^2 definiert sondern auf $C^2(\mathbb{R}^3) \cap L^2(\mathbb{R}^3)$

$e^{-t\Delta} \overset{?}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Delta^n t^n$ konvergent?

für die meisten Fkt nicht, aber in dichten Unterraum

$e^{-t\Delta}$ kann konstruiert werden (stetig ausdehnen)

$\Rightarrow (e^{-t\Delta} \rho)(x) = \frac{1}{(2\pi t)^{3/2}} \int e^{\frac{|x-y|^2}{2t}} \rho_0(y)\, dy$

$\langle \Delta \varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, \Delta \psi \rangle$ symmetrisch

- kann auch $(\Delta + i)^{-1}$ definieren oder $\ln(\Delta + 1)$

Ziele:

- Fredholmtheorie
- Spektralsatz für selbstadj. Operatoren

Hilberträume

E $\mathbb{C}$-V.R.

$\langle , \rangle$ Sesquilinearform

$\langle , \rangle \; \underset{\text{antilin.}}{E} \times \underset{\text{linear}}{E} \to \mathbb{C}$

Bsp:

- $\mathbb{C}$

$\langle z, z' \rangle = -\bar{z} z'$ (sym.)

- $\mathbb{C}^2$

$\langle z_1, z_2' \rangle = \bar{z}_1 z_2'$ (nicht sym.)

- $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$

$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}^3} \bar{f} g$ (sym) (nicht neg) (positiv)

Def:

- Symmetrisch $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
- nicht negativ: $\langle x, x \rangle \geq 0$
- positiv: nicht negativ + $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$

Def: $\langle\,,\rangle$ ist Skalarprodukt, wenn es symmetrisch und positiv ist.

Bem Cauchy-Schwarz:

$\langle\,,\rangle$ symm. und nicht neg. dann

$|\langle x,y\rangle|^2 \leq \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle = \|x\|^2\|y\|^2$

Def: Ein Prähilbertraum ist ein Paar $(E, \langle\,,\rangle)$ aus einem $\mathbb{C}$-VR E und einem Skalarprodukt.

Bsp: • $(E, \langle\,,\rangle)$ ein PHR

$\|x\| := \sqrt{\langle x,x\rangle}$ ist Norm Δ folgt aus Cauchy Schwarz

$d(x,y) = \|x-y\|$ Abstand

Def: Ein Hilbertraum ist ein vollständiger PHR

Bsp: • $(\mathbb{C}^n, \langle z, z'\rangle := \sum_{i=1}^n \bar{z}_i z_i')$

• typ. Bsp. für den Anfang:

(X, R, μ) Maßraum

$\mathcal{L}^2(X, R, \mu) = \{f: X \to \mathbb{C} \text{ messbar}, \int_X |f|^2 d\mu < \infty\}$

$\langle f,g\rangle := \int_X \bar{f} g \, d\mu$ symm. $\overset{\text{nicht neg.}}{\text{Sesquilinearform}}$ i.a. nicht positiv

$|\bar{f}g| \leq \frac{1}{2}(|f|^2 + |g|^2)$

z.B. nicht positiv:

$(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, \delta_0)$

$\langle f,f\rangle = |f(0)|^2 = 0$ falls $f(0) = 0$

Konstruktion von Hilberträumen:

• „Vernichtung von Nullvektoren"

$(E, \langle\,,\rangle)$ mit $\langle\,,\rangle$ symm. nicht neg.

$N := \{x \in E \mid \langle x,x\rangle = 0\} \subseteq E$

Für $x,y \in N$: $|\langle x,y\rangle|^2 \leq \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle = 0$

also $\langle x,y\rangle = 0$

$x + \lambda y \in N$, denn

$$\langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle = \langle x,x\rangle + \bar{\lambda}\langle y,x\rangle + \lambda\langle x,y\rangle + |\lambda|^2\langle y,y\rangle = 0$$

$\Rightarrow N \subseteq E$ lin. Unterraum

$\bar{E} := E/N$

$\langle\langle [x],[y]\rangle\rangle := \langle x,y\rangle$ Skalarprodukt

wohldef? $\langle x+n, y\rangle = \langle x,y\rangle + \langle n,y\rangle = \langle x,y\rangle \quad n \in N$

$$|\langle n,y\rangle| \leq \langle n,n\rangle\langle y,y\rangle = 0$$

$\langle\langle [x],[x]\rangle\rangle = 0 \iff \langle x,x\rangle = 0 \iff x \in N \iff [x] = 0$

Bsp

- $(\mathcal{L}^2(X,\mathcal{R},\mu)/N, \langle\langle , \rangle\rangle)$

  PHR "$L^2(X,\mathcal{R},\mu)$" ist Hilbertraum (Maßtheorie)

Konstruktion:

- $(E, \langle , \rangle_E), (F, \langle , \rangle_F)$ HR

  $E \otimes^{alg} F$ algebraisches Tensorprodukt

  $\langle e \otimes f, e' \otimes f'\rangle := \langle e,e'\rangle\langle f,f'\rangle$ symm., positiv

  Wenn E, F ∞-dim, dann nicht vollständig

  $\Rightarrow$ PHR

- $(E, \langle , \rangle)$ PHR

  $d(x,y) := \|x-y\|$

  $E \hookrightarrow \bar{E}$ Verrollständigung

$$\begin{tikzcd} E \times E \arrow[r] \arrow[d, "+"] & \bar{E} \times \bar{E} \arrow[d, "+"] \\ E \arrow[r] & \bar{E} \end{tikzcd}$$

kann man $+$ ausdehnen?

$+$ stetig + univ. Eigenschaft

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r] \arrow[d, "\lambda"] & \bar{E} \arrow[d, "\lambda"] \\ E \arrow[r] & \bar{E} \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow \bar{E}$ vollst. V.R.

$$\begin{tikzcd} E \times E \arrow[r] \arrow[d, "\langle , \rangle"] & \bar{E} \times \bar{E} \arrow[dl] \\ \mathbb{C} & \end{tikzcd}$$

brauchen Stetigkeit von $\langle , \rangle : E \times E \to \mathbb{C}$

(Parallelogrammgleichung) Polarisierungsgleichung

$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2)$

$\Rightarrow (\overline{E}, \langle , \rangle)$ HR.

Standardbsp: • $L^2(X, R, \mu)$

$(X = \mathbb{N}, R = \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu = \text{Zählmaß})$

$L^2(\mathbb{N}, R, \mu) =: \ell^2 = \{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \}$

Def: $\overline{E \otimes^{alg} F} =: E \otimes F$ Hilbertraum-Tensorprodukt

• $(X, R, \mu), (Y, S, \nu) \longrightarrow (X\times Y, R\times S, \mu\times\nu)$ Produktmaßraum

$L^2(X, R, \mu) \otimes L^2(Y, S, \nu) \xrightarrow{\sim} L^2(X\times Y, R\times S, \mu\times\nu)$

Falls Maßräume σ-endlich

23.6.09

Def:

Sei $(H, (,))$ HR

$V \subset H$ lin. Teilraum

$(,)_{|V}$ S.P. auf V

Wenn V abgeschl. (damit vollst.), dann ist $(V, (,)_{|V})$ HR

=: Unterraum

Def:

$X \subset H$ Teilmenge

$X^{\perp} := \{ h\in H \mid \langle h, x\rangle = 0 \ \forall x \in X \}$

• $X^{\perp} \subset H$ lin. Teilraum

• $X^{\perp} = \overline{X^{\perp}}$ (folgen-abgeschl.)

$\Rightarrow (X^{\perp}, (,)_{|X^{\perp}})$ Unterraum (geht bei Banachräumen i.A. nicht)

$V \subset H$ Unterraum

$V \cap V^{\perp} = \{0\}$

$V \oplus V^{\perp} \subset H$

Satz: • $H = V \oplus V^{\perp}$

• Es ex. $P: H \to V$ stetig Projektion Projektionssatz

entlang $V^{\perp}$ ($\ker P = V^{\perp}$), $\|P\| = 1 < \infty$

Eind.: $f = f + f^\perp = g + g^\perp$
$\Rightarrow \underset{V \ni}{f - g} = g^\perp - f^\perp \in V^\perp$
$= 0$

Bew. $x \in H$

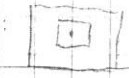
muß x zerlegen als $y + y^\perp \in V + V^\perp$

- Löse $\min\limits_{y \in V} \|x - y\|$

Lsg. ex. eind. da Abstandsbälle in HR strikt konvex sind.

HR:

Allg:



1 Fall $\min = 0 \Rightarrow x \in V$, $x = y$

2. Fall $\min > 0$ (y_i) Minimalfolge

$\|x - y_i\| =: d_i \longrightarrow \min$

$e_i := \dfrac{x - y_i}{\min}$

a) (e_i) Cauchy $\rightarrow (y_i)$ Cauchy

$y_i \longrightarrow y \in V$ (da V abgeschl.)

$\|x - y\| = \min$ da $\|\,\|$ stetig

b) (e_i) nicht Cauchy

Es ex. $\varepsilon > 0$, Teilfolgen $n_k, m_k \longrightarrow \infty$ mit

$\|e_{n_k} - e_{m_k}\| > \varepsilon$

$\|e_{n_k}\| \to 1$

$\|e_{m_k}\| \to 1$

$\limsup\limits_k \|\tfrac{1}{2}(e_{n_k} + e_{m_k})\| = \limsup\limits_k \dfrac{1}{\min} \overbrace{\|x - \tfrac{1}{2}\underbrace{(y_{n_k} - y_{m_k})}_{\in V}\|}^{\geq \min} \geq 1$

$\diamond$-Gleichung:

$\tfrac{1}{2}\|a + b\|^2 + \tfrac{1}{2}\|a - b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2$

$\tfrac{1}{2}\|e_{n_k} + e_{m_k}\|^2 = \|e_{n_k}\|^2 + \|e_{m_k}\|^2 - \tfrac{1}{2}\|e_{n_k} - e_{m_k}\|^2 \quad | \cdot \tfrac{1}{2}$

$\limsup\limits_k \|\tfrac{1}{2}(e_{n_k} + e_{m_k})\|^2 \leq 1 - \tfrac{1}{4}\varepsilon^2$ ↯

(b) tritt also nicht ein.

Bem: Minimierer ist eind. $\|x - y_0\| = \|x - y_1\| = \min$ mit $y_0 \neq y_1$

Wähle Folge $y_0, y_1, y_0, \ldots$ als Minimalfolge ↯ zu Cauchy

- $x - y \in V^\perp$:

Sei $v \in V$ bel., $t \in \mathbb{R}$

$\|x - (y + t v)\|^2 = \|x - y\|^2 + t\langle x - y, v\rangle + t\langle v, x - y\rangle + t^2\|v\|^2 =$

$= \min + 2t\,\mathrm{Re}(\langle x - y, v\rangle) + t^2\|v\|^2$

$\Rightarrow \mathrm{Re}(\langle x - y, v\rangle) = 0$, da $\frac{d}{dt}|_{t=0} = 0$ gilt da bei $t = 0$ kritischer Punkt

$\Rightarrow \operatorname{Im}(\langle x-y, v\rangle) = 0$

also $\langle x-y, v\rangle = 0 \;\forall\, v \in V$

$\Rightarrow x-y \in V^\perp$

$x = \underset{V}{\underset{\cap}{y}} + \underset{V^\perp}{\underset{\cap}{(x-y)}}$

also $H = V \oplus V^\perp$

Bew 2: $\|Px\|^2 = \|y\|^2 \leq \|x\|^2$, da

$\|x\|^2 \leq \|y\|^2 + \|x-y\|^2$

$\|P\| \leq 1$, $P(x) = x$ für $x \in V$

$\Rightarrow \|P\| = 1$ (falls $V \neq \{0\}$)

$\square$

Bem: $E \subset H$ lin. Teilraum

$E^\perp$, $(E^\perp)^\perp \supset E$, $(E^\perp)^\perp = \overline{E}$

E abgeschl $\Leftrightarrow (E^\perp)^\perp = E$

Basen

$(H, \langle,\rangle)$ HR

Def: $S \subset H$ heißt Orthonormalsystem, falls

$\langle s, t\rangle = \begin{cases} 0 & s \neq t \\ 1 & s = t \end{cases} \quad \forall\, s, t \in S$ gilt.

(ONS)

Ein ONS ist eine Orthonormalbasis (ONB), falls

$\overline{\operatorname{span}(S)} = H$ ($\neq$ Def in Lin. Alg)

Bem S ONB $\Leftrightarrow S^\perp = \{0\}$

Bsp: I Menge

$\ell^2(I)$

$i \in I$, $e_i : I \to \mathbb{C}$

$e_i(j) = \delta_{ij}$

$\{e_i \mid i \in I\} \subseteq \ell^2(I)$ ist ONB

$\underset{I}{\cong}$ z.B. $\ell^2(\mathbb{N})$, $\ell^2(\mathbb{R})$

• Konstruktion: Orthonormalisierung Gram-Schmidt

Sei $S = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ abgezählte Teilmenge von H

Wähle Teilfolge $n_k \in \mathbb{N}$, s.d.

$n_k = \min\{ i > n_{k-1} \mid x_i \notin \operatorname{span}\{x_{n_1}, \dots, x_{n_{k-1}}\}\}$

$y_k := x_{n_k}$

$\tilde{S} = \{y_k \mid k \in \mathbb{N}\}$

$y_k \notin \operatorname{span}\{y_1, \dots, y_{k-1}\} \quad \forall k$

$\operatorname{span} \tilde{S} = \operatorname{span} S$

$z_k := \frac{1}{\|\cdot\|}\left(y_k - \sum_{l=1}^{k-1} \langle z_l, y_k \rangle z_l\right), \qquad z_1 := \frac{1}{\|y_1\|} y_1$

$\tilde{\tilde{S}} := \{z_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ ONS

$\operatorname{span} \hat{S} = \operatorname{span} S$

Bsp: • $L^2([-1,1], \mathcal{B}, |\cdot|)$

$S = \{1, t, t^2, \dots\}$

$\tilde{S} = \{z_0, z_1, \dots\}$

$z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$z_n(t) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \left((t^2-1)^n\right)$ Legendre-Polynome

ONB da $\underset{\text{Übungsblatt}}{\text{stetige} \subset L^2 \text{ dicht}}$ und $(\text{poly}_i) \xrightarrow{i \to \infty}$ stetige

$(H, \langle , \rangle)$

$S \subset H$ ONS

$\ell^2_c(S) \overset{\text{dicht}}{\subset} \ell^2(S)$ Fkt mit kompakten (= endl.) Träger

$\Phi: \ell^2_c(S) \to H$

$\Phi(f) := \sum_{s \in S} f(s) s$ Koordinaten

Beh: $\|\Phi(f)\| = \|f\|_{\ell^2}$

Φ dehnt sich zu einer Isometrie $\ell^2(S) \to H$ $\overset{\text{stetig}}{\text{aus}}$

Bew: $\|\Phi(f)\|^2 = \langle \sum_{s \in S} f(s) s, \sum_{t \in S} f(t) t \rangle = \sum_{s,t} \overline{f(s)} f(t) \langle s, t \rangle =$

$= \sum_s \overline{f(s)} f(s) = \|f\|^2$

$\overline{\ell^2_c(S)} = \ell^2(S)$ dicht, deshalb Ausdehnung ex.

und $\|\Phi\|_\infty < \infty$

Bem: $x \in H$, $f_x(s) := \langle s, x\rangle$ ← Koord. von x in Richtung s

Beh: $\langle \cdot, x\rangle = f_x \in \ell^2(S)$

Bew: $T \subset S$ endl.

$$\|x - \sum_{s\in T} f_x(s)s\|^2 = \langle x - \sum f_x(s)s, x - \sum f_x(t)t\rangle =$$
$$= \|x\|^2 - \sum \overline{f_x(s)}\underbrace{\langle s,x\rangle}_{\overline{(x,s)}} - \sum_{t\in T} f_x(t)\langle x,t\rangle + \sum \overline{f_x(s)} f_x(t)\langle s,t\rangle =$$
$$= \|x\|^2 - \sum_{s\in T} |\langle s,x\rangle|^2 \geq 0$$

Besselsche Ungleichung

$$\|x\|^2 \geq \underbrace{\sum_{s\in S} |\langle s,x\rangle|^2}_{=\|f_x\|^2} \quad \text{weil beschränkt}$$

$f_x \in \ell^2(S)$ □

$$P(x) = \Phi(f_x) = \sum_{s\in S} \langle s,x\rangle s$$

$\psi: H \to \ell^2(S)$, $x \mapsto f_x$ ist stetig, $\|\psi\| \leq 1$, da $\underset{\leq \|x\|^2}{\sum_{s\in S} |\langle s,x\rangle|^2} = \|\psi(x)\|^2$

Beh: P ist Projektion auf $\overline{\operatorname{span} S}$

Bew: z.z. $x - P(x) \in S^\perp$

$$\langle x - P(x), s\rangle = \langle x,s\rangle - \sum_{t\in S}\overline{\langle t,x\rangle}\langle t,s\rangle = \langle x,s\rangle - \overline{\langle s,x\rangle} = 0$$

$x \in \overline{\operatorname{span} S}$, dann $P(x) = x$

da P stetig, also reicht z.z. für $x \in \operatorname{span} S$

$$x = \sum_{s\in S}^{\text{endl}} c_s s \Rightarrow P(x) = \sum_{t\in S}\langle t, \sum_{s\in S}^{\text{endl}} c_s s\rangle t = \sum_t \sum_s^{\text{endl}} c_s\langle t,s\rangle t = \sum_s^{\text{endl}} c_s s = x$$
□

Insbesondere: Sei S ONB, dann

$\Phi: \ell^2(S) \xrightarrow{\sim} H$ Iso mit Inversem $\psi = \Phi^{-1}$

Satz: Jeder separable $\overbrace{HR}^{\infty\text{-dim}}$ ist ~~isometrisch~~ isomorph zu $\ell^2(\mathbb{N})$

Bew: H sep., d.h. H hat abgezählte dichte Teilmenge S

Orthonormalisierung $\rightsquigarrow \tilde{\tilde{S}} \cong \mathbb{N}$ ONB

$$\ell^2(\mathbb{N}) \cong \ell^2(\tilde{\tilde{S}}) \overset{\Phi}{\cong} H$$

Bsp: Maßtheorie $(X, \mathcal{B}, \mu)$ Maßraum

Regularitätseigenschaften $\Rightarrow L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$ separabel

$L^2(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, |\cdot|)$ ist separabel

$U \subset \mathbb{R}^n$ ~~offen~~ messbar $\Rightarrow L^2(U, \mathcal{B}_{|U}, |\cdot|_{|U})$ separabel durch

$\chi_U : L^2(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, |\cdot|) \to L^2(U, \mathcal{B}_{|U}, |\cdot|_{|U})$ Char. Fkt. $\hat{=}$ Proj

Satz: Sei M Mf, orientiert, $\omega \in \Omega^n(M)$ Volumenform

$\rightsquigarrow \mu_\omega$ Maß $\rightsquigarrow (M, \mathcal{B}, \mu_\omega)$ Maßraum $\mu_\omega(K) = \int_K \omega$

$L^2(M, \mathcal{B}, \mu_\omega)$ separabel, denn

Bew: Überdecke durch abzählbar viele Karten (U_i, φ_i) ($\rightsquigarrow$ Top. abz. Basis)

$A_i := U_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} U_j$

$L^2(M, \mathcal{B}, \mu_\omega) \to$ ~~$L^2(\bigsqcup(A_i, \mathcal{B}_{|A_i}, \mu_{|A_i}))$~~

$\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} L^2(A_i, \mathcal{B}_{|A_i}, \mu_{\omega|A_i})$

$L^2(A_i, \ldots) \cong L^2(\varphi(A_i), \ldots)$ separabel

$\omega(x) \cdot |\cdot|$

$\cong L^2(\varphi(A_i), \ldots, |\cdot|)$

$\bigoplus_{i \in \mathbb{N}}$ separabel = sep.

26.6.09

$(H, (\,,\,))$ HR

$(\,,\,)$ induziert $J: \overline{H} \to H'$ durch

$J(x)(y) = (x, y)$ Dualitätsabbildung

Bem: Das ist wohldef:

stetig: $\|J(x)\| = \sup_{\substack{y \in H \\ \|y\|=1}} |(x,y)| \le \sup \|x\|\|y\| = \|x\|$

in der Tat

$\|J(x)\| = \|x\|$ $\quad (J(x)(x) = \|x\|^2)$

$\Rightarrow J$ ist isometrisch, insb. injektiv

Satz: J ist ein Iso von Banachräumen (Riesz)

Bew: z.z. J ist surjektiv

Sei $\varphi \in H'$, $M := \ker \varphi \subseteq H$

φ stetig $\Rightarrow M$ abgeschlossen

1. $M^\perp = 0 \Rightarrow M = H \Rightarrow \varphi = 0$, $\varphi = J(0)$

2. $M^\perp \neq 0 \Rightarrow$ ex $y \in M^\perp$ mit $\varphi(y) = 1$

Beh: $J\left(\frac{y}{\|y\|^2}\right) = \varphi$

$x \in H$

$$x = \underbrace{(x - \varphi(x)l(y))}_{\in M} + \underbrace{\varphi(x)l(y)}_{\in M^\perp}$$

$$J\left(\frac{y}{\|y\|^2}\right)(x) = \left(\frac{y}{\|y\|^2}, x\right) = \varphi(x)$$

$\square$

Def: $\boxed{B(H)} = \{A : H \longrightarrow H$ beschr. lin. Operatoren$\}$

$A \in B(H)$. $\boxed{A'} \in B(H')$ dualer Operator $A'(\varphi) := \varphi \circ A$ Zurückziehen von Funktionalen

Def: $\boxed{A^*} = J^{-1} \circ A' \circ J$

$$H \xrightarrow{J} \overline{H}' \xrightarrow{A'} \overline{H}' \xrightarrow{J^{-1}} H$$

Eigenschaften:

i) $(Ax, y) = (x, A^* y)$ für alle $x, y \in H$:

$$(x, A^* y) = (x, J^{-1} A' J y) = \overline{(A' J(y))(x)} =$$
$$= \overline{J(y)(Ax)} = \overline{(y, Ax)} = (Ax, y)$$

ii) $\|A^*\| \leq \|J\| \, \|J^{-1}\| \, \|A'\| = \|A'\| = \|A\|$

iii) $(A^*)^* = A$

$$(x, (A^*)^* y) = (A^* x, y) = \overline{(y, A^* x)} = \overline{(Ay, x)} = (x, Ay)$$

$$0 = (x, (A^*)^* y - Ay) \quad \forall x$$

$$\Rightarrow (A^*)^* y = Ay \quad \forall y$$

$$\Rightarrow (A^*)^* = A$$

iv) $\|A\| = \|(A^*)^*\| \leq \|A^*\| \leq \|A\|$

$$\Rightarrow \|A\| = \|A^*\|$$

v) $(AB)^* = B^* A^*$

$$J^{-1}(AB)' J = J^{-1} B' A' J = J^{-1} B' J J^{-1} A' J = B^* A^*$$

vi) $(A^*)^{-1} = (J^{-1} A' J)^{-1} = J^{-1} (A')^{-1} J = J^{-1} (A^{-1})' J = (A^{-1})^*$

vii) $(\lambda A)^* = J^{-1} (\lambda A)' J = \bar{\lambda} J^{-1} A' J = \bar{\lambda} A^*$

semilin

viii) C^*-Eigenschaft:

$$\|A^* A\| = \|A\|^2:$$

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax \rangle = \underbrace{\langle A^* Ax, x \rangle}_{= J(A^* Ax)(x)} \leq \|A^* A x\| \, \|x\|$$

CSU

$$\Rightarrow \|A\|^2 \leq \|A^* A\| \leq \|A^*\| \, \|A\| = \|A\|^2$$

Bem: $\mathcal{A}$ Algebra / $\mathbb{C}$

$\|\cdot\|$ Banach-Norm mit

$\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$

$\Bigg\}$ =: Banach-Algebra

Bsp: V Banach, $B(V)$ Banachalgebra

Def: $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ Banachalg

* mit $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A$ — antilinear

$(AB)^* = B^* A$ anti-multiplikativ

$(A+B)^* = A^* + B^*$

$\|A^*\| = \|A\|$ isometrisch

$(A^*)^* = A$ involutiv

$(\mathcal{A}, \|\cdot\|, *)$ heißt Banach-$*$-Algebra

C^*-Algebra ist B-$*$-Alg. $(\mathcal{A}, \|\cdot\|, *)$ mit C^*-Eigenschaft

$\|A^* A\| = \|A\|^2$

Bsp: • $B(H)$ ist C^*-Algebra

• (X, R, μ) Maßraum

$H = L^2(X, R, \mu)$, $f: X \to \mathbb{C}$ messbar

$(A\varphi)(x) := f(x)\varphi(x)$ Operator auf H

$\|A\| = \operatorname{esssup} |f|$

$(A^*\varphi)(x) = \bar{f}(x)\varphi(x)$ denn $\langle A\varphi, \psi\rangle = \int \overline{f(x)\varphi(x)}\,\psi(x)\,d\mu$

$= \langle \varphi, A^*\psi\rangle$

$\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N})$

$(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$

1 2 3 4

$S: \ell^2 \to \ell^2$ Schift

$S(e_i) = e_{i+1}$

$S(x) = S\left(\sum_i^\infty \langle e_i, x\rangle e_i\right) = \sum_i^\infty \langle e_i, x\rangle e_{i+1}$

$\|S(x)\|^2 = \sum |\langle e_i, x\rangle|^2 = \|x\|^2$

$\Rightarrow$ S ist Isometrie insb. $\ker S = \{0\}$

$\mathrm{Im}(S) = \overline{\mathrm{span}(e_2, e_3, \dots)}$. $\mathrm{Im}(S)^\perp = \mathbb{C} e_1$

$\mathrm{Coker}(S) = H/\mathrm{Im}(S)$ 1-dim

$(S^* e_i, e_j) = (e_i, S e_j) = (e_i, e_{j+1}) = \delta_{i,j+1}$

$$S^* e_i = \begin{cases} e_{i-1} & i \geq 2 \\ 0 & i = 1 \end{cases}$$

$0 \leftarrow 1 \leftarrow 2 \leftarrow 3 \leftarrow 4$

$\ker S^* = \mathbb{C} e_1 = \mathrm{Im}(S)^\perp$

$\mathrm{Im}\, S^* = \ell^2 = \ker(S)^\perp$

Bem: $A \in B(H)$

$\ker A^* = \mathrm{Im}(A)^\perp$

$\overline{\mathrm{Im}\, A^*} = \ker(A)^\perp$

Bew: $0 = (A^* x, y) = (x, Ay) = 0$

$x \in \ker A^* \iff x \in \mathrm{Im}(A)^\perp$ $\square$

$S \subseteq H$ ONB

$A \in B(H)$

$(A_{s,t}) \in \mathrm{Mat}(S, \mathbb{C})$ (keine Algebra)

$A_{s,t} = \langle e_s, A e_t \rangle$

$B(H) \xhookrightarrow{\text{lin.}} \mathrm{Mat}(S, \mathbb{C})$ nicht surj!

$(A^*)_{s,t} = (\overline{A}_{t,s})$, denn:

$(A^*)_{s,t} = (e_s, A^* e_t) = (A e_s, e_t) = \overline{(e_t, A e_s)} = \overline{A_{t,s}}$

(X, R, μ) Maßraum

$k : X \times X \longrightarrow \mathbb{C}$ messbar Kernfunktion

$(Af)(x) := \int_X k(x,y) f(y)\, d\mu(y)$ Integraloperator

Annahme: $\left.\begin{array}{l} \int_X |k(x,y)|\, d\mu(y) \leq C_1 \text{ gleichmäßig in } x \\ \int_X |k(x,y)|\, d\mu(x) \leq C_2 \text{ gleichmäßig in } y \end{array}\right\}$ oder $k \in L^2(X \times X)$

Beh: A ist wohldef. & kompakt

kenne nicht Existenz

Bew: $\left| \int_X k(x,y) f(y)\, d\mu(y) \right| \leq \int_X |k(x,y)| |f(y)|\, d\mu(y)$

$\leq \int |k(x,y)|^{1/2} |k(x,y)|^{1/2} f(y)\, d\mu(y)$ $\leq$ Cauchy-Schwarz

$$\leq \left(\int_X |k(x,y)|\, d\mu(y)\right)^{1/2} \left(\int_X |k(x,y)|\, |f(y)|^2\, d\mu(y)\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq c_1^{1/2} \left(\int_X |k(x,y)|\, |f(y)|^2\, d\mu(y)\right)^{1/2}$$

$$\int_X \left(\int_X |k(x,y)||f(y)|\, d\mu(y)\right)^2 d\mu(x)$$

$$\leq \int_X c_1 \int_X |k(x,y)||f(y)|^2\, d\mu(y)\, d\mu(x) \leq \text{ Fubini}$$

$$\leq c_1 c_2 \int_X |f(y)|^2\, d\mu(y) < \infty \text{, da } f \in L^2$$

$$= c_1 c_2 \|f\|^2$$

$\Rightarrow (Af)(x)$ existiert

und $\|A\| \leq \sqrt{c_1 c_2}$ ☐

Für Matrizen: (Zählmaß) mit S abzählbar

$A_{s,t}$

$$A\left(\sum_{s\in S} c_s s\right) = \sum_{\substack{t\in T\\ s\in S}} A_{t,s} c_s t$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{für alle } s: & \sum_t |A_{t,s}| \leq c_1 \\ t: & \sum_s |A_{t,s}| \leq c_2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{das def. } A \in B(H) \\ \|A\| \leq \sqrt{c_1 c_2} \end{array}$$

Hinreichendes Kriterium, wann eine Matrix einen Operator definiert.

Bem: Nicht alle Operatoren lassen sich als Integraloperator schreiben

Beh: A^* wird durch $\overline{k(y,x)}$ gegeben ((X, R, μ) σ-endlich) für Fubini

Bew:
$$(Af, g) = \int_X \int_X \overline{k(x,y) f(y)}\, g(x)\, d\mu(y)\, d\mu(x)$$
$$= \int_X \int_X \overline{f(y)}\, \overline{k(x,y)} g(x)\, d\mu(y)\, d\mu(x) = \text{ Fubini}$$
$$= \int_X \overline{f(y)} \underbrace{\left(\int_X \overline{k(x,y)}\, g(x)\, d\mu(x)\right)}_{= (A^* g)(x)} d\mu(y)$$

- E, F Hilbert

$A: E \to F$

$A^* = J_E^{-1} \circ A' \circ J_F : F \to E$

$E \oplus F =: H$ mit $\langle e \oplus f, e' \oplus f' \rangle = \langle e, e' \rangle + \langle f, f' \rangle$

$\hat{A} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix} \in B(H)$

$\Rightarrow$ Zurückführen auf Operatoren $H \to H$

Nächst Stunde: starke, schwache Top
Approx von Op. durch Matrizen, kompakte Op.
Lin GLS auf Hilberträumen

30.6.09

Lokal konvexe Topologien auf $\mathbb{C}$-VR

Sei V $\mathbb{C}$-VR.

Def: Eine Abb. $p: V \to [0,\infty)$ heißt **Halbnorm**, falls

1) $p(\lambda v) = |\lambda|\, p(v) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C},\ v \in V$ Homogenität

2) $p(v+w) \leq p(v) + p(w) \quad \forall v, w \in V$ Dreiecksungleichung

Bsp:

- X top. Raum, $C(X)$

  $K \subseteq X$ kompakt: $p_K(f) = \sup_K |f|$
- $V' \ni \varphi$

  $p_\varphi(v) = |\varphi(v)|$

Def:

- $A \subset V'$ heißt beschränkt, falls

  $\sup_{a \in A} |a(v)| < \infty \quad \forall v \in V$

Bsp:

- $p_A(v) := \sup_{a \in A} |a(v)|$
- V, W Banach

  $B(V,W)$

  $v \in V$, $p_v(A) := \|Av\|_W$
- $w' \in W'$

  $p_{w',v}(A) = |w'(Av)|$

V $\mathbb{C}$-VR

I Menge von Halbnormen

$v \in V$, $p \in I$, $\varepsilon > 0$

$U_{v,p,\varepsilon} = \{ w \in V \mid p(w-v) < \varepsilon \} \subseteq V$

Def: $\boxed{T(I)}$ ist die durch die Mengen

$\{ U_{v,p,\varepsilon} \mid v \in V,\ p \in I,\ \varepsilon > 0 \}$ (Subbasis)

erzeugte Topologie

Bem: Eine Folge $(v_i)_{i \in \mathbb{N}}$ konvergiert in $T(I)$ gegen v, falls

$p(v_i - v) \to 0$ für alle $p \in I$. (Zentralübung)

Bsp. $\cdot$ $(V, \|.\|)$ Banach

$\mathcal{T}(\{\|.\|\})$ ist die Banachraum-Topologie

$\cdot$ $(H, \langle .,. \rangle)$ Hilbert

$I = \{p_x \mid x \in H\}$ mit $p_x(h) = |\langle x, h \rangle|$

Def: $\mathcal{T}(I)$ heißt schwache Topologie (w-lim)

$\mathcal{T}(\|.\|)$ heißt starke Topologie (s-lim)

$\cdot$ $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ONS auf H

$w\text{-}\lim_i e_i = 0$, denn

$\sum_i |\langle x, e_i \rangle|^2 < \infty$

also $|\langle x, e_i \rangle| \to 0$

$p_x(e_i) \to 0 \quad \forall x \in H$

(ONS konv. immer schwach gegen 0)

$\cdot$ $s\text{-}\lim e_i$ ex. nicht

$\|e_i - e_j\| = \sqrt{2} \quad i \neq j$

keine Cauchy-Folge

Bem: $\mathcal{T}(I) \subseteq \mathcal{T}(\{\|.\|\})$

(Saalübung)

Def: V top. VR

$V' := \mathrm{Hom}_{\text{stetig}}(V, \mathbb{C})$

$p_v(v') = |v'(v)|$

$\mathcal{T}(\{p_v \mid v \in V\})$ schwache Top auf V'

$p_{v'}(v) = |v'(v)|$

$\mathcal{T}(\{p_{v'} \mid v' \in V'\})$ $*$-schwache Top auf V

Def: $\mathcal{B}(H)$

$I = \{p_h \mid h \in H\}$

$p_h(A) := \|Ah\|$

$\mathcal{T}(I)$ heißt starke Operator-Topologie auf $\mathcal{B}(H)$

Bsp: $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ONB

P_n = Projektion auf $\mathrm{span}\langle e_1, \dots, e_n\rangle$

$s\text{-}\lim P_n = 1$

$\lim P_n = \|\cdot\|\text{-}\lim P_n$ ex. nicht

Bew: $\cdot\ P_h(P_n - 1) = \| P_n(h) - h)\| = \| \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, h\rangle e_i - h\| =$

$= \| \sum_{i=n+1}^{\infty} \langle e_i, h\rangle e_i \| \longrightarrow 0$

$\cdot\ \| P_n - 1\| \geq \|(P_n - 1)(e_{n+1})\| = 1 \quad \forall n$

Satz: $* : B(H) \longrightarrow B(H)$

ist normstetig (bereits gezeigt), aber nicht stark stetig

Bew: $A_n := \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \overset{n}{} & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ & & 0 & & \end{pmatrix} \end{array}$

$A_n^* = \begin{array}{c} \\ n \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 0 & \\ \vdots & \\ 1 & 0 \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix}$

$s\text{-}\lim A_n \to 0$

$\| A_n v\| = |\langle e_n, v\rangle| \longrightarrow 0 \qquad \forall v \in H$

$A_n^* e_1 = e_n$

$\underset{\lim_n e_n}{\underset{\shortparallel}{\lim A_n^* e_1}}$ ex. nicht in $\|\cdot\|$

$\square$

Bem: $B \in B(H)$

$$\begin{aligned} B(H) &\longrightarrow B(H) \\ A &\longmapsto A \cdot B \end{aligned}$$

ist stark stetig

Def: $A \in B(H)$ heißt <u>endlich-dim.</u>, falls $\dim \operatorname{Im} A < \infty$

$B_{fin}(H) := \{ A \in B(H) \mid A \text{ endl. dim.} \}$

- $B_{fin}(H)^* = B_{fin}(H)$, da
$\dim \operatorname{Im} A^* = \dim H/\ker A^* = \dim (\ker A^*)^{\perp} = \dim \operatorname{Im} A$
- $K(H)^* = K(H)$
- $\overline{B_{fin}(H)}^{s} = B(H)$ (falls H separabel), da
$A = s\text{-}\lim (P_n A) \quad (s\text{-}\lim P_n = 1)$

- $\overline{B_{fin}(H)}^{\|\cdot\|} \subsetneq B(H)$, $\dim H = \infty$

$1 \notin \overline{B_{fin}(H)}^{\|\cdot\|}$:

$A \in B_{fin}(H)$ ex. $v \in \operatorname{Ker} A$ $\|v\| = 1$

$\|A - 1\| \geq \|(A-1)(v)\| = \|v\| = 1$

Def: $\cdot$ $I = \{ p_{v,w} \mid v, w \in H \}$

$p_{v,w}(A) = |\langle w, Av \rangle|$

$T(I)$ heißt schwache Operatornorm.

Bem: $\circ$ (A_n^*) konvergiert schwach:

$|\langle w, Av \rangle| = |\langle w, e_n \rangle \langle e_1, v \rangle| \to 0$

- $* : B(H) \to B(H)$ ist schwach stetig

Bem: $T_{schwach} \subseteq T_{stark} \subseteq T_{\|\cdot\|}$

Bew: $U_{A, p_{x,y}, \varepsilon} \in T_{schwach}$ gegeben z.z. $(H, T_{stark}) \xrightarrow{id} (H, T_{schwach})$, $x \longmapsto x$ ist stetig

$U_{A, p_x, \delta} \subset U_{A, p_{x,y}, \varepsilon}$ mit $\delta := \frac{\varepsilon}{\|y\|}$

$|\langle x, (B-A)_y \rangle| \leq \|y\| \, \|(B-A)x\|$

$U_{A, \|\cdot\|, \kappa} \subset U_{A, p_x, \delta}$ mit $\kappa := \frac{\delta}{\|x\|}$

Satz: (*) $(H, (\cdot,\cdot))$ HR

$(v_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $v_i \in H$

w-lim v_i existiert $\Rightarrow$ $(\|v_i\|)$ beschränkt

$(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $A \in B(H)$

w-lim A_i existiert $\Rightarrow$ $(\|A_i\|)$ beschränkt

(Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit) Banach-Steinhaus

Def: $(B, \|\cdot\|)$ Banach

p Halbnorm

p beschränkt, falls $\sup_{\|x\| \leq 1} p(x) < \infty$ $=: \|p\|$

Bem: p beschränkt $\Rightarrow$ p stetig, denn

$|p(x) - p(y)| \leq \|p\| \, \|x - y\|$

(Links:) $\to \forall v, \varepsilon$ ...

Satz: Eine unterhalbstetige Halbnorm ist beschränkt

Bew: a) p nicht beschränkt $\Rightarrow$ p ist auf keinem Ball beschränkt

Indirekt: Sei $p(w) \leq C \quad \forall\, w \in B(v, \delta)$

$$p(w-v) \leq p(w) + p(v) \leq 2C$$

für $\|x\| \leq 1$ gilt $p(x) = \frac{1}{\delta} p(\delta x) \leq \frac{2C}{\delta}$

also p auf $B(0,1)$ beschr.

b) Sei p unterhalbstetig und nicht beschr.

Konstr. induktiv Folge (v_i), (δ_i)

$v_1 \in B(0,1)$, $\quad p(v_1) > 1$

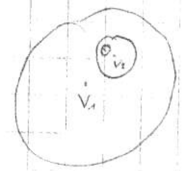
wähle $0 < \delta_1 < 1/2$, s.d.

$\|w - v\| < \delta_1 \Rightarrow p(w) > 1$

$v_{n+1} \in B(v_n, \delta_n)$, $\quad p(v_{n+1}) \geq 2^n$

$0 < \delta_{n+1} < \frac{1}{2}\delta_n$, s.d.

$\|w - v\| < \delta_{n+1} \Rightarrow p(w) > 2^n$



(v_n) Cauchyfolge

$v_n \to v$

$p(v) > 2^n \quad \forall n$ ↯

$\square$

Satz: Eine punktweise beschränkte Menge S beschränkter Halbnormen ist gleichmäßig beschränkt.

$S = \{$beschr. Halbnormen$\}$

$\sup_{s \in S} s(v) < \infty \quad \forall\, v \in B$

$\Rightarrow$ bilde $r := \sup_{s \in S} s$

$r(v) = \sup_{s \in S} s(v)$ (r ist Halbnorm)

Dann ist r beschränkt.

Bew: z.z. r unterhalbstetig

$v \in B$, $\varepsilon > 0$ gegeben

Sei $s \in S$ mit $r(v) - s(v) \leq \frac{\varepsilon}{2}$

Sei $\delta > 0$, s.d. aus $\|v - w\| < \delta \Rightarrow |s(v) - s(w)| < \frac{\varepsilon}{2}$

Sei $\|w - v\| < \delta$

$r(w) - r(v) \geq s(w) - s(v) - \frac{\varepsilon}{2} \geq -\varepsilon$ III

Def: V $\mathbb{C}$-VR

I Menge von Halbnormen

$\mathcal{T}(I)$ Topologie

$A \subset V$ heißt beschränkt, falls

$\sup_{a \in A} p(a) < \infty \quad \forall p \in I$

(hängt nur von der Topologie ab)

Folgerung: Eine schwach beschr. Teilmenge ist $\|.\|$-beschränkt in $(H, (,))$ HR.

Bew: $A \subset H$ schwach beschr.

$\sup_{a \in A} \|a\| = \sup_{a \in A} \sup_{\substack{v \in H \\ \|v\|=1}} |\langle a, v\rangle| = \sup_{\|v\|=1} \sup_{a \in A} p_a(v) = \|\sup_{a \in A} p_a\| \overset{\text{Satz}}{<} \infty$

Bew (*) Teil 1 gezeigt.

Teil 2:

$\mathcal{A} \subset B(H)$ w-beschränkt

$\Rightarrow \mathcal{A}$ ist $\|.\|$-beschränkt

$\cancel{\sup_{A \in \mathcal{A}} \|A\| = \sup_{A \in \mathcal{A}} \sup_{\substack{v, w \in H \\ \|v\|=\|w\|=1}} |\langle v, Aw\rangle| = \sup_{\substack{v, w \in H \\ \|v\|=\|w\|=1}}}$

a) $v \in H$, $\{Av \mid A \in \mathcal{A}\}$ ist schwach beschränkt

Teil 1 $\Rightarrow \{Av\}$ ist $\|.\|$-beschränkt

b) $p_A(v) := \|Av\|$ Halbnorm auf H

$\sup_A p_A$ beschränkt auf H

$\sup_{\|v\|=1} \sup_{A \in \mathcal{A}} \|Av\| = \sup_{A \in \mathcal{A}} \|A\| < \infty$

3.7.09

Kompakte Operatoren

$(H, (,))$ HR

$\overline{B_{fin}(H)}^{s} = B(H)$ (H separabel)

aber wenn $\dim H = \infty$

$\overline{B_{fin}(H)}^{\|.\|} \subsetneq B(H)$

Def: $\boxed{K(H)} = \overline{B_{fin}(H)}^{\|.\|}$

heißt Raum kompakter Operatoren

Eigenschaften: • $K(H) \subseteq B(H)$ ist $\|.\|$-abgeschlossen

• $K(H)$ ist lin. Teilraum (vollst.) (Abschluss von UVR ist UVR)

• $K(H)$ ist beidseitiges Ideal:

Sei $K \in K(H)$, $A \in B(H)$

z.z.: $AK, KA \in K(H)$

Wähle (B_i), $B_i \in B_{fin}(H)$ mit $B_i \xrightarrow{\|.\|} K$, dann

$AB_i \xrightarrow{\|.\|} AK$ da Multipl. $\|.\|$-stetig

und $B_i A \xrightarrow{\|.\|} KA$

$B_i A$, AB_i endl.-dim $\Rightarrow$ Beh.

• $K(H)^* = K(H)$:

$B_{fin}(H)^* = B_{fin}(H)$ und $*$ ist $\|.\|$-stetig.

• $X \subseteq H$ beschränkt und $K \in K(H)$, dann ist $K(X)$ präkompakt:

Sei (x_i) Folge in X z.z: $(K(x_i))$ hat konv. Teilfolge

Wähle (A_n) in $B_{fin}(H)$, $A_n \xrightarrow{\|.\|} K$

$(\|A_n\|)$ beschränkt

$(A_n x_i)$ beschr. Folge in $\operatorname{Im} A_n$, $\dim \operatorname{Im} A_n < \infty$ $\Rightarrow$ $A(X)$ präkompakt

Ersetze x_i durch Teilfolge, s.d. $(A_1 x_i)$ konvergent

$(A_2 x_i)$ konv. (Teilfolge)

⋮

$\Rightarrow (A_n x_i)$ konv. $\forall n$

Diagonalfolge $(A_n x_n) \longrightarrow y$, denn

$\|A_n x_n - A_m x_m\| \leq \|(A_n - A_m) x_n\| + \|A_m (x_n - x_m)\|$ + Term

Sei $\varepsilon > 0$ geg. wähle m_0 s.d. für $n, m \geq m_0$

$\|\underbrace{(A_n - A_m)}_{\text{Cauchy}} \underbrace{x_n}_{\|x_i\| \text{ beschr.}}\| < \frac{\varepsilon}{2}$ ... $\Longrightarrow (A_n x_n)$ ist Cauchy

$K x_n \longrightarrow y$:

$\|K x_n - y\| \leq \|\underbrace{(K - A_n)}_{\to 0} \underbrace{x_n}_{\text{beschr.}}\| + \|\underbrace{A_n x_n - y}_{\to 0}\|$

Satz: Ist $A \in B(H)$ und $A(X)$ präkompakt (relativ kompakt) für alle beschränkten $X \subseteq H$, dann gilt $A \in K(H)$

Bew: $P_n A \xrightarrow{\|\cdot\|} A$:

Lemma: (B_n) Folge in $B(H)$

$B_n \xrightarrow{s} B$

$W \subseteq H$ präkompakt

dann $B_n|_W \xrightarrow{\text{gleichm. } \|\cdot\|} B|_W$, d.h. $\sup_{w \in W} \|B_n w - Bw\| \longrightarrow 0$

Bew: Indirekt: $\sup_{w \in W} \|B_n w - Bw\| \not\to 0$

finde $\varepsilon > 0$ und (w_n) in W mit $\|B_n w_n - Bw_n\| > \varepsilon \quad \forall n$

OBdA $w_n \longrightarrow w$ (präkompakt), $w \in \overline{W}$

$\varepsilon < \|B_n w_n - Bw_n\| \leq \|B_n w_n - B_n w\| + \|B_n w - Bw\| + \|Bw - Bw_n\| \longrightarrow 0$

$(\|B_n\|)$ beschr. nach Prinzip d. gleichm. Beschr.

$\|B_n(w_n - w)\| \longrightarrow 0$

$\|(B_n - B)(w)\| \longrightarrow 0$ $\quad ↯$

$\|\overset{B(w-w_n)}{\cancel{Bw - Bw_n}}\| \longrightarrow 0$

□

$A(B(1,0))$ präkompakt nach Vor.

$\overline{A(B(1,0))}$ kompakt $\Rightarrow$ sep. metr. Raum (metr. + vollst. + präkomp $\Rightarrow$ komp.) (kompakt + metr. $\Rightarrow$ sep)

$\overline{\operatorname{Im} A} = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} n \cdot A(B(1,0))}$ ist separabel

wähle ONB (e_i) in $\overline{\operatorname{Im} A}$ (abzählbar)

P_n = Projektor auf span$(e_1, \dots e_n)$

$P_n \xrightarrow{s} P$ = Projektor auf $\overline{\operatorname{Im} A}$

Beh: $P_n A \xrightarrow{\|\cdot\|} PA = A \qquad P_n A \in B_{fin}(H)$

da $P_n|_{A(B(0,1))} \longrightarrow P|_{A(B(0,1))}$ (Lemma)

□

Bsp:

- ℓ^2, (e_i) ONB

$A_k(e_i) = \begin{cases} \frac{1}{i} e_i, & i \leq k \\ 0, & i > k \end{cases}$

$A_k \xrightarrow{\|\cdot\|} A = \operatorname{diag}(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$ kompakt

- $\Phi : \overline{H} \overset{alg}{\otimes} H \longrightarrow B(H)$

$\phi(a \otimes b)(x) = \langle a, x \rangle \cdot b \in B_{fin}(H)$

fortsetzen auf $\otimes$: dazu

$\| \phi \| = ?$

$u = \sum^{endl.} a_i \otimes b_i = \sum^{endl.} c_{ij} e_i \otimes e_j$ mit (e_i) ONS

$\| \phi(u)(x) \|^2 = \| \sum c_{ij} \langle e_i, x \rangle e_j \|^2 = \sum_j | \sum_i c_{ij} \langle e_i, x \rangle |^2 \leq$

$\leq \sum_j (\sum_i |c_{ij}|^2 \sum_i |\langle e_i, x \rangle|^2) \leq \sum_{ij} |c_{ij}|^2 \|x\|^2 = \|u\|^2 \|x\|^2$

also ~~$\|\phi\| \leq$~~ $\| \phi(u) \| \leq \|u\|$

damit dehnt sich ϕ stetig aus zu $\overline{H} \otimes H \to B(H)$, $\searrow K(H)$, $K(H) \subseteq B(H)$

$\phi(H \otimes H) =: L^2(H) \subseteq K(H)$

heißen Hilbert-Schmidt-Operatoren

- (X, R, μ) Maßraum, σ-endl.

$H = L^2(X, R, \mu)$, $\overline{H} \otimes H = L^2((X, R, \mu)^2)$, $k \in L^2((X,R,\mu)^2)$

$\phi(k) =: K$

$K(f)(x) = \int k(x,y) f(y) \, d\mu(y)$

$g, h \in L^2(X, R, \mu)$, $h \otimes g$

$k = \overline{h}(y) g(x) \in L^2((X, R, \mu)^2)$

$K(f)(x) = \int g(x) \overline{h}(y) f(y) \, d\mu(y)$

$\Phi(k)(f)(x) = \langle h, f \rangle g(x) = \int \overline{h}(y) f(y) \, d\mu(y) \, g(x)$ (= $K(f)(x)$)

Fredholmoperatoren

Def: $F \in B(H)$ heißt Fredholm-Operator, falls

$[F] \in \underbrace{B(H) / K(H)}_{\text{Banach-Algebra}} = C(H)$ invertierbar ist — Calkin-Algebra

Bem: F ist Fredholm, falls es $Q_l, Q_r \in B(H)$ mit

$Q_l F - 1 \in K(H)$, $F Q_r - 1 \in K(H)$ gilt

Def: Q_l, Q_r heißen linke und rechte Parametrix von F

(kann fordern $Q_l = Q_r$)

Bsp: $\cdot$ $1+K$, $K \in K(H)$

$[1] = [1+K]$

$\uparrow$ invertierbar

$\cdot$ Schift: $S: \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$

$S(e_i) := e_{i+1}$ Fredholm

Parametrix: S^*

$S^*S - 1 = 0$

$SS^* - 1 = -P_{e_1} \in K(H)$

$\cdot$ $\ell^2(\mathbb{Z})$ $\quad P^+(e_i) := \begin{cases} e_i & i \geq 0 \\ 0 & i < 0 \end{cases}$ ist nicht Fredholm, da

$\dim \ker P^+ = \infty$, aber

Lemma: F Fredholm $\Rightarrow$ $\dim \ker F < \infty$

Bew: $Q_e F - 1 = K \in K(H)$

$-1|_{\ker F} = K|_{\ker F}$

$-1|_{\ker F}$ ist kompakt $\Rightarrow \dim \ker F < \infty$ $\quad$ ($-1|_{\ker F}$ kompakt $\Rightarrow$ $B(0,1)$ präkompakt $\Rightarrow \dim \ker F < \infty$)

Bsp: $\cdot$ $A = \mathrm{diag}(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$ nicht Fredholm

$\ker A = 0$

$A \in K(\ell^2)$, $[A] = 0$

$H = \overline{\mathrm{Im} A} \supsetneqq \mathrm{Im}(A)$

Lemma: F Fredholm $\Rightarrow$ $\mathrm{Im}\, F$ abgeschl.

Bew: (x_i) Folge in H, $Fx_i \to y$

z.z. $y \in \mathrm{Im}\, F$

OBdA $x_i \in \ker F^\perp$

a) (x_i) beschr.

$Q_e F x_i - x_i = K(x_i)$ konv (evtl. Teilfolge)

$\downarrow$

$Q_e y$

$\Rightarrow x_i$ konv

$x_i \to z$

$F(z) = y \in \mathrm{Im}\, F$

b) (x_i) unbeschr.

OBdA $\|x_i\| \to \infty$

$\overline{x_i} = \frac{x_i}{\|x_i\|}$; $F\overline{x_i} \to 0$

$\underset{\downarrow \atop 0}{Q_e F\overline{x_i}} - \overline{x_i} = K(\overline{x_i})$ konv (evtl. Teilfolge)

$\Rightarrow \overline{x_i} \to z$, $\|z\| = 1$

$F(z) = 0$, $z \in \ker F \cap \ker F^\perp \Rightarrow z = 0$ ↯

- $L^2[-1,1] = H$

$(Af)(x) := x f(x)$ nicht Fredholm, denn:

$Q_e A - 1 = K$

$\varphi_i \in L^2([-1,1])$, $\|\varphi_i\| = 1$

$\operatorname{supp} \varphi_i \subset [2^{-i+1}, 2^{-i}]$

$\|A\varphi_i\| \le 2^{-i}$

$\underset{\downarrow \atop 0}{Q_e A\varphi_i} - \varphi_i = K(\varphi_i)$ konv (evtl. Teilfolge)

$\|\varphi_i - \varphi_j\| = \sqrt{2} \Rightarrow \varphi_i$ konv nicht ↯

7.7.09

Lemma: F Fredholm $\Rightarrow \dim \operatorname{Coker}(F) < \infty$

Bew: Übung $\ker F^* = \operatorname{Coker} F$ und F^* Fredholm
da $\operatorname{Im} F$ abgeschl.

Def: $\boxed{\operatorname{Fred}(H)}$ Menge der Fredholmoperatoren

Lemma: a) $\operatorname{Fred}(H) \subseteq B(H)$ offen (bzgl $\|.\|$)

b) $\operatorname{Fred}(H)$ ist unter Komposition abgeschlossen

Bew: b) $B(H) \to B(H)/K(H)$ ist Algebrahomo

und $GL(B(H)/K(H))$ ist abgeschl. unter Komposition

a) $GL(B(H)/K(H))$ ist offen in Banachalgebra $B(H)/K(H)$

π ist stetig

Satz: Sei $F \in B(H)$ und gelte $\dim \ker(F) < \infty$,

$\operatorname{Im}(F) = \overline{\operatorname{Im}(F)}$ und $\dim \operatorname{Coker}(F) < \infty$. $\overset{\text{Genau}}{\text{Dann}}$ ist F Fredholm

Bew: $H = (\ker F)^{\perp} \oplus \ker F$

$H = \operatorname{Im} F \oplus (\operatorname{Im} F)^{\perp}$

$F = \begin{pmatrix} \overline{F} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\overline{F} : \ker(F)^{\perp} \longrightarrow \operatorname{Im} F$

surjektiv, inj., stetig

Satz: von der offenen Abbildung (open mapping principle)

$A : W \longrightarrow V$ stetig lin. Operator zw. Banachräumen und Vektorraumiso, dann ist A^{-1} stetig. ($A(X)$ offen $\forall X$ offen)

Bew: später $\square$

Also $\overline{F}^{-1}$ stetig

$Q = \begin{pmatrix} \overline{F}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$FQ - 1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ auf $\operatorname{Im} F^{\perp}$ $\in K(H)$

$QF - 1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ auf $\ker F$ $\in K(H)$

also $F \in \operatorname{Fred}(H)$

$\square$

Bew (offene Abb.) z.z. $A(U)$ offen für U offen

es reicht z.z. $A(U)$ ist Umgebung der Null, wenn U Umgebung der Null ist, da A linear.

es reicht z.z. $\exists\ \varepsilon > 0$, s.d. $B_{\varepsilon}(0) \subset A(B_1(0))$ da A linear.

schwächere Aussage: ex $\varepsilon > 0$ mit $B(0,\varepsilon) \subseteq \overline{A(B(0,1))}$

A ist surj.: $A\left(\bigcup_{N \in \mathbb{N}} N\, B(0,1)\right) = V$

$\qquad \bigcup_{N \in \mathbb{N}} A(B(0,N))$

Beh: $\exists\ N_0 \in \mathbb{N}$ und inneren Punkt $x_0 \in \overline{A(B(0,N_0))}$

Bew: Wenn nicht dann $\overline{A(B(0,N))}^{c}$ offen und dicht ($A(B(0,N))$ nirgends dicht $\Rightarrow V$ ist von 1. Kategorie ↯ zu V Banach) für alle $N \in \mathbb{N}$. $\emptyset = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{A(B(0,N))}^{c}$ abzählbarer Durchschnitt offener dichter Teilmengen ↯ zu nächstem Satz

Satz: Bairescher Kategoriensatz:

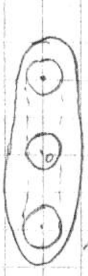
X vollst. metr. Raum

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ offene dichte Teilmengen von X.

Dann $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ ist dicht in X

Bew: Später $\square$

Also ex inneres Punkt, d.h. $\exists\, \varepsilon>0$, s.d.



$B(x_0,\varepsilon) \subseteq \overline{A(B(0,N_0))}$

dann auch $B(-x_0,\varepsilon) \subseteq \overline{A(B(0,N_0))}$ da A lin.

$\overline{A(B(0,N_0))}$ $\|w\| < \varepsilon$ $\quad x_0+w,\ -x_0+w \in \overline{A(B(0,N_0))}$

$\overline{A(B(0,N_0))}$ konvex, da $B(0,N_0)$ konvex und A lin., also

$w = \frac{1}{2}(x_0+w+(-x_0+w)) \in \overline{A(B(0,N_0))}$

also $B(0,\varepsilon) \subseteq \overline{A(B(0,N_0))}$.

$\varepsilon_0 := \frac{\varepsilon}{N_0}$. dann $B(0,\varepsilon_0) \subseteq \overline{A(B(0,1))}$

2. Zeige: $B(0,\varepsilon_0) \subseteq A(B(0,1))$

Sei $\|w\| < \varepsilon_0$. Wähle δ, s.d. $\|w\| < \delta < \varepsilon_0$

setze $\overline{w} = \frac{\varepsilon_0}{\delta} w$ dann $\overline{w} \in B(0,\varepsilon_0) \subseteq \overline{A(B(0,1))}$

wähle $\alpha \in (0,1)$ s.d. $\frac{\delta}{\varepsilon_0(1-\alpha)} < 1$

wähle $v_0 \in B(0,1)$ s.d. $\|Av_0 - \overline{w}\| < \alpha\varepsilon_0$

$w_1 := \frac{1}{\alpha}(\overline{w} - Av_0)$ dann $\|w_1\| < \varepsilon_0$

wähle $v_1 \in B(0,1)$ s.d. $\|w_1 - Av_1\| < \alpha\varepsilon_0$

setze $w_2 := \frac{1}{\alpha^2}(\overline{w} - A(v_0+\alpha v_1)) \in B(0,\varepsilon_0)$

$\vdots$

$v_m \in B(0,1)$ erfülle $\|w_m - Av_m\| < \alpha\varepsilon_0$

$w_{m+1} = \alpha^{-m-1}\left(\overline{w} - A\left(\sum_{n=0}^{m} \alpha^n v_n\right)\right) \in B(0,\varepsilon_0)$

$\rightsquigarrow$ Folge (v_i) mit $\|\overline{w} - A(\sum \alpha^n v_n)\| \le \alpha^{m+1}\varepsilon_0$

$\overline{v} := \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n v_n$ ex. da geom. Reihe Majorante

$\overline{w} = A\overline{v}$ da A stetig

$w = \frac{\delta}{\varepsilon_0}\overline{w} = Av$ mit $v := \frac{\delta}{\varepsilon_0}\overline{v} \in$ ~~$B(0,1)$~~

$\|\overline{v}\| \le \sum \alpha^n \|v_n\| \le \sum \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha}$

$\|v\| \le \frac{\delta}{\varepsilon_0(1-\alpha)} < 1$ also $v \in B(0,1)$

also $w \in A(B(0,1))$, da $w = Av$. $\square$

Bew: Bairescher Kategoriensatz:

$D := \bigcap$

Sei $x_0 \in X$, $\varepsilon > 0$.

z.z. $D \cap B(x_0, 2\varepsilon) \neq \emptyset$

$U_1 \cap B(x_0, \varepsilon) \ni x_1$ ex. da U_1 dicht.

wähle $0 < \varepsilon_1 < \frac{1}{2}\varepsilon$ s.d. $\overline{B(x_1, \varepsilon_1)} \subset U_1 \cap B(x, \varepsilon)$

$U_2 \cap B(x_1, \varepsilon_1) \ni x_2$

wähle $0 < \varepsilon_2 < \frac{1}{2}\varepsilon_1$ s.d. $\overline{B(x_2, \varepsilon_2)} \subset U_2 \cap B(x_1, \varepsilon_1)$

induktiv finde Folge (ε_i), $0 < \varepsilon_{n+1} < \frac{1}{2}\varepsilon_n$

und (x_i) mit $x_{n+1} \in B(x_n, \varepsilon_n)$ und $\overline{B(x_n, \varepsilon_n)} \subseteq \bigcap_{m \leq n} U_m$

(x_i) Cauchyfolge, d.h. $x_i \to x$ ex.

und $x \in \bigcap_{n \geq 1} U_n$, $x \in B(x_0, \varepsilon)$

$\square$

Def: Für $F \in \mathrm{Fred}(H)$ definieren wir

$\boxed{\text{index } F} := \dim \ker F - \dim \operatorname{Coker} F$

($\dim H = \infty$)
ansonsten $\text{index } F = 0$ nach Homomorphiesatz

Satz
1) $\text{index}: \mathrm{Fred}(H) \longrightarrow \mathbb{Z}$ $\overset{\text{diskret}}{\text{stetig}}$ und surj.

2) $\text{index}(F \circ G) = \text{index } F + \text{index } G$ Gruppenhomo

3) $\text{index}(F^*) = -\text{index } F$

Bew:
3) $\ker F^* \cong \operatorname{Coker} F$

$\operatorname{Coker} F^* \cong \ker F$

2) $\Rightarrow$ 1) $F \in \mathrm{Fred}(H)$

$H = (\ker F)^\perp \oplus \ker F = \operatorname{Im} F \oplus (\operatorname{Im} F)^\perp$

$F = \begin{pmatrix} \overline{F} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\overline{F}$ $(\ker F)^\perp \xrightarrow{\sim} \operatorname{Im} F$ stetiger Iso

P Proj. auf $(\ker F)^\perp$

Q Proj. auf $\operatorname{Im} F$

$P^* = P$, $Q^* = Q$ $\Rightarrow$ $\text{index } Q = \text{index } P = 0$

P, Q Fredholm ($PP - 1 \in K(H)$)

Sei $F' \in \mathrm{Fred}(H)$ (kein dual)

$\text{index}(QF'P) = \text{index } F'$

und $\operatorname{index}(Q F' P) = \operatorname{index}\begin{pmatrix} \overline{QF'P} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Wenn F' nahe bei F, dann $\overline{QF'P}$ nahe bei $\overline{F} = \overline{QFP}$

also $\overline{QF'P}$ $\underset{\text{(GL offen)}}{\text{invertierbar}}$, also $\operatorname{index}(QF'P) = \operatorname{index} F$ $\quad$ ∀ Argument siehe Skript

für F' nahe bei F. ⇒ stetig $\quad \overset{\shortparallel}{\operatorname{index} F'}$ $\quad$ ⇒ index lokal konstant

• surj: $\operatorname{index} 1 = 0$

ℓ^2, Schift $S \in \operatorname{Fred}(\ell^2)$ hat $\operatorname{index} S = 1$ $\quad$ eher -1

bette dies in allg. H ein durch $H = \ell^2 \oplus H'$

und erhalte Fredholmoperator vom Index -1

$\operatorname{index}(S^n) = -n$, $\quad \operatorname{index}((S^*)^n) = +n$

2) $\dim \ker(F \circ G) = \dim \ker G + \dim(\operatorname{Im} G \cap \ker F)$

$\dim \operatorname{Coker}(F \circ G) = \dim \operatorname{Coker} F + \dim \left(H / \ker F + \operatorname{im} G \right)$

$$\overset{\shortparallel}{\dim}\left(\underbrace{H/\operatorname{Im} G \Big/ \ker F + \operatorname{Im} G / \operatorname{Im} G}_{\text{endl. dim}} \right) = \dim \operatorname{Coker} G - \dim \frac{\ker F}{\ker F \cap \operatorname{Im} G}$$

$$\operatorname{index} FG = \dim \ker G + \dim(\operatorname{Im} G \cap \ker F) - \dim \operatorname{Coker} F - \dim \operatorname{Coker} G + \dim \frac{\ker F}{\ker F \cap \operatorname{Im} G} = \operatorname{index} F + \operatorname{index} G$$

□

Bem:

• $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & \varepsilon \end{pmatrix}$ invertierbar

kann durch kleine Störung ε, invertierbar machen.

falls $\operatorname{index} F = ?$

• $\operatorname{Fred}(H) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} \operatorname{index}^{-1}(n)$
$\uparrow$ zusammenhängend (Übung)

$F \in \operatorname{Fred}(H)$, $b \in H$

gesucht $x \in H$ mit $Fx = b$

lösbar g.d.w. $b \in \operatorname{Im} F$

das sind $\dim \operatorname{Coker} F$ - viele Bedingungen

Sei $(r_1, \dots, r_n)$ Basis von $(\operatorname{Im} F)^\perp$

$\langle r_i, b \rangle = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$

notwendig und hinreichend für Lösbarkeit

Wenn $b \in \operatorname{Im} F$, dann

Lösungsmenge $x_0 + \ker F$ endl. dim.

für eine Lsg x_0.

Anwendung: PDE (F ist Differentialoperator)

10. 7. 09

Spektraltheorie

$(H, (,))$

$A \in B(H)$

Def: $\sigma(A) := \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid A - \lambda \mathbb{1}$ nicht invertierbar $\}$

Spektralwert

stetig

(also in $B(H)$)

Spektrum von A

$\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ Resolventenmenge

Bem: $\rho(A)$ ist offen! (da GL offen) also $\sigma(A)$ abgeschlossen

Def: $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt Eigenwert von A, falls $\ker(\lambda - A) \neq \{0\}$,

$\dim \ker(\lambda - A)$ heißt Multiplizität

$\sigma_p(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda$ Eigenwert von $A \}$ Punktspektrum

Bem: $\sigma_p(A) \subsetneq \sigma(A)$ i. A.

Bsp: $L^2([-1,1]) = H$

$A \in B(H)$ $(Af)(x) = x f(x)$

$\|A\| = 1$?

$\sigma(A) = [-1, 1]$

~~$(A^{-1} f)(x) = \frac{1}{x} f(x)$ nicht beschränkt~~

$((\lambda - A)^{-1} f)(x) = \frac{1}{\lambda - x} f(x)$ nicht beschränkt für $\lambda \in [-1,1]$

$\sigma_p(A) = \emptyset$:

$(\lambda - A) f = 0 \Leftrightarrow \lambda f(x) = x f(x) \quad \forall x$

$\Leftrightarrow f(x) = 0 \quad x \neq \lambda$

also $f = 0$ fast überall $\Rightarrow [f] = 0$ in L^2

Satz: $A = A^* \Rightarrow \sigma_p(A) \subseteq \mathbb{R}$

Bew: $Ax = \lambda x \quad x \neq 0, \ \|x\| = 1$

$\Rightarrow \lambda = \langle x, Ax \rangle = \langle Ax, x \rangle = \bar{\lambda}$ □

Bem: in der Tat $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$ (ohne Beweis)

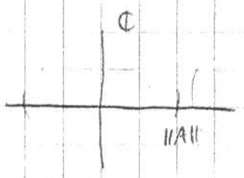
Bew: $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \Rightarrow \|(\lambda - A)x\|^2 \geq \underbrace{\mathrm{Im}(\lambda)^2}_{\neq 0} \|x\|^2$

$\Rightarrow \lambda - A$ inj.

$\bar{\lambda} - A$ inj $\Rightarrow \lambda - A$ hat dichtes Bild

+ Bild abgeschl. + Satz über Umkehrabb $\Rightarrow$ invertierbar □

Bem ??



$\lambda - A = \lambda\left(1 - \frac{A}{\lambda}\right)$ Neumann-Reihe falls $\lambda > \|A\|$

Konv. Radius

Bsp: • $\ell^2 \xrightarrow{S} \ell^2$ Schift

$\sigma_p(S) = \emptyset$, denn

$Sx = \lambda x, \quad x = \sum c_i e_i$

$\sum c_i e_{i+1} = \lambda \sum c_i e_i$

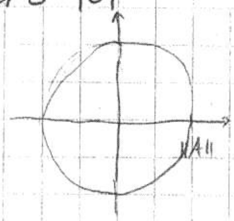
$\Rightarrow c_{i-1} = \lambda c_i \quad i \geq 2$

$\Rightarrow \lambda c_1 = 0$

Falls $\lambda \neq 0 \Rightarrow c_i = 0 \Rightarrow x = 0$

Falls $\lambda = 0 \Rightarrow x = 0$ da $\ker S = \{0\}$

Satz: • $\sigma(A) \subseteq \overline{B(0, \|A\|)}$



Bew: $|\lambda| > \|A\|$

$\lambda - A = \lambda\left(1 - \frac{A}{\lambda}\right)$ Neumann-Reihe

$(\lambda - A)^{-1} = \lambda^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A}{\lambda}\right)^n$ konv, da $\left\|\frac{A}{\lambda}\right\| < 1$

Bem: $A = A^*$; $\sigma_p(A) \subseteq [-\|A\|, \|A\|]$

Def: A heißt normal, falls $[A, A^*] = 0$

Satz: A normal $\Rightarrow \lambda \neq \mu$: $\ker(\lambda - A) \perp \ker(\mu - A)$

Bew: siehe Lin. Alg.

Lemma ~~Satz~~:

$(H, \langle , \rangle)$

$A \in B(H)$

$A = A^*$

$n(A) := \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x\rangle|$

dann $n(A) = \|A\|$ $\hat{=}$ größter Diagonaleintrag

Bew: $\sup |\langle Ax, x\rangle| \leq \|A\|$ Cauchy-Schwarz

$\Rightarrow n(A) \leq \|A\|$

z.z. $n(A) \geq \|A\|$

$\langle A(x+y), x+y\rangle - \langle A(x-y), x-y\rangle =$

$= 2\langle Ax, y\rangle + 2\underbrace{\langle Ay, x\rangle}_{=\overline{\langle Ax, y\rangle}} = 4 \operatorname{Re} \langle Ax, y\rangle$

$4 \operatorname{Re} \langle Ax, y\rangle \underset{\Delta}{\leq} n(A) \left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right) = 2n(A)\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$

$\|x\| = \|y\| = 1$

$\operatorname{Re} \langle Ax, y\rangle \leq n(A)$

$\langle Ax, y\rangle = e^{i\lambda} |\langle Ax, y\rangle|$

ersetze also x durch $e^{-i\lambda} x =: x'$

$|\langle Ax', y\rangle| \leq n(A)$

$\overset{\sup_{\|y\|=1}}{\Longrightarrow}$ $\|Ax'\| \leq n(A)$

$\overset{\sup_{\|x\|=1}}{\Longrightarrow}$ $\|A\| \leq n(A)$

$\square$

Satz: Sei $A \in K(H)$ selbstadj.

Dann ist $\|A\|$ oder $-\|A\|$ ein Eigenwert

Bew: $\cdot$ $A = 0$ klar

$\cdot$ $A \neq 0$:

Wähle Folge $(x_i) \in \overset{\text{Sphäre}}{S(0,1)}$ mit

$|\langle Ax_i, x_i\rangle| \longrightarrow \|A\|$ $(= \sup)$

nach Wahl einer Teilfolge

$\underbrace{\langle Ax_i, x_i\rangle}_{\in \mathbb{R}} \longrightarrow \|A\|$ oder $-\|A\| =: \lambda$

$$0 \leq \|(\lambda - A)x_n\|^2 = \overbrace{\|Ax_n\|^2}^{\leq \|A\|^2 = \lambda^2} - 2\lambda \langle Ax_n, x_n\rangle + \lambda^2$$

$$\leq 2\lambda^2 - 2\lambda \langle Ax_n, x_n\rangle \longrightarrow 0$$

$\Rightarrow (\lambda - A)x_n \longrightarrow 0$

A kompakt, wähle Teilfolge, s.d.

$Ax_n \longrightarrow y$

$$x_n = \frac{1}{\lambda}\big(\underbrace{(\lambda - A)x_n}_{\downarrow\, 0} + \underbrace{Ax_n}_{\downarrow\, y}\big) \longrightarrow \frac{y}{\lambda}$$

$\Rightarrow \underbrace{\|x_n\|}_{=1} \longrightarrow \frac{\|y\|}{|\lambda|}$

insb. $y \neq 0$

$$y = \lim_{n\to\infty} Ax_n \overset{\text{stetig}}{=} A\left(\frac{y}{\lambda}\right)$$

$\lambda y = Ay$ also y Eigenvektor zu λ $\square$

Satz: $K \in K(H)$ kompakt, $K = K^*$

(λ_n) Folge von Eigenwerten, paarw. versch., dann:

$|\lambda_i| \to 0$ (0 ist einziger Häufungspunkt)

Bew. ~~e_n EV zu λ mit $\|e_n\| = 1$~~

$\lambda_n \longrightarrow \mu$ nach Wahl einer Teilfolge

e_n EV zu λ_n, $\|e_n\| = 1$

$e_n \perp e_m$ $n \neq m$, da $\lambda_n \neq \lambda_m$

$e_n \xrightarrow{w} 0$ da ONS

$Ke_n \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ ~~nach Wahl einer Tf.~~

$\| $

$Ke_n = \lambda_n e_n$

$\|Ke_n\| = |\lambda_n| \longrightarrow 0$

also $\mu = 0 \Rightarrow$ jede Teilfolge $\to 0 \Rightarrow \lambda_n \to 0$ $\square$

Satz. $K = K^*$ kompakt

$\lambda_1, \lambda_2, \dots$ Eigenwerte $\neq 0$

$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots$

$v_{n,m}$, $m = 1, \dots, \dim \ker(\lambda_n - K) =: m_n$ sei ONB von $\overbrace{\ker(\lambda_n - K)}^{\text{endl.-dim}}$

$$K_N(\cdot) = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \sum_{m=1}^{m_n} \langle v_{n,m}, \cdot\rangle v_{n,m} \quad \text{endl. dim. Diagonalmatrix}$$

$\| $

$pr_N \circ K$ Projektion auf die ersten N Eigenräume

Lemma: ~~Satz~~: $K_N \xrightarrow{\|.\|} K_\infty \in K(H)$

Bew: $\|K_N - K_M\| \leq |\lambda_N| \xrightarrow{N\to\infty} 0 \Rightarrow$ Cauchyfolge
$M \geq N$ $\square$

Lemma: $K_\infty = K$

$H_1 = \overline{\operatorname{Im} K_\infty} = \overline{\operatorname{span}\langle v_{n,m}\rangle}$

$H = H_1 \oplus H_1^\perp$

$K(H_1) \subseteq H_1$ also auch $K(H_1^\perp) \subseteq H_1^\perp$ $\quad \langle K y, x\rangle = \langle y, Kx\rangle = 0$

$\Rightarrow K = \begin{pmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_1^\perp \end{pmatrix} \quad K_\infty = \begin{pmatrix} K_{\infty,1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$K_{\infty,1} = K_1$

z.z. $K_1^\perp = 0$

$K_1^\perp$ kompakt, K auf $K^\perp$ hat keinen EW $\neq 0$, $\underbrace{}_{(K_1^\perp)^* = K_1^\perp \Rightarrow \|K_1^\perp\| = 0}$ also $K_1^\perp = 0$

Satz: **Spektralsatz**

Sei $K = K^*$ in $K(H)$ kompakt.

Dann ex ONS (e_n) von H aus EV zu EW λ_n, s.d.

$K(.) = \sum \lambda_n \langle e_n, .\rangle e_n$

Nächste Stunde: Schrödinger Operatoren

$\dim \ker \lambda - K < \infty$ für $K \in K(H)$: $\lambda - K$ Fredholm für $\lambda \neq 0$

14.7.09

Quantenmechanik auf S^1

Def: **Schrödingergleichung**: $i\dot\psi = A\psi$ mit

$\underset{\text{kin.}}{\Delta} + \underset{\text{Pot.}}{V} = A \leftarrow$ Hamiltonoperator für Teilchen im Potential

ges. sind EW'e von A (Energien)

param. S^1 durch $t \longrightarrow e^{it}$

dann $\Delta f = -f^{(2)}$

$V \in C^\infty(S^1, \mathbb{R})$ Multiplikation mit V.

$H^0 := L^2(S^1, B, vol)$ ist Zustandsraum mit $vol(S^1) = 2\pi$

$D := C^\infty(S^1) \subseteq H^0$ Definitionsbereich

$A: D \longrightarrow H^0$

λ ist EW von A, wenn es ein $\psi \overset{\neq 0}{\in} D$ gibt, s.d.

$A\psi = \lambda\psi$

Satz: Es gibt eine ONB (e_n) von H^0 aus EV'en von A zu EW'en (λ_n) mit $\lambda_n \to \infty$

Bew.: 1. Mache A beschränkt durch

<u>Graphennorm</u>: $\|f\|_2^2 := \|\Delta f\|_0^2 + \|f\|_0^2$ L^2, $f \in D$

$H^2 = clo_{\|\cdot\|_2} D$ (Abschluss)

$\|f\|_2 \geq \|f\|$, $D \subseteq H^0$ dicht

$\Rightarrow H^2 \subseteq H^0$. $I: H^2 \to H^0$ (nat. Inklusion, $\|I\|_{B(H^2, H^0)} \leq 1$)

$\|\Delta f\|_{H^0} \leq \|f\|_{H^2}$, $f \in D$

also dehnt sich Δ stetig zu $\overline{\Delta}: H^2 \to H^0$ aus

mit $\|\overline{\Delta}\|_{B(H^2, H^0)} \leq 1$

Idee: $\overline{\Delta} + (V + C)I: H^2 \to H^0$, $C \gg 0$

beschränkt, Isomorphismus

$I(\overline{\Delta} + (V+C)I)^{-1}: H^0 \to H^2 \to H^0$

und I kompakt also kompakt + selbstadj.

$\rightsquigarrow$ liefert Eigenbasis

2). $\overline{\Delta} + 1: H^2 \to H^0$ ist Iso:

ONB von H^0 $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $f_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}$

ONB von H^2: $\|f_n\|_{H^2}^2 = \|n^2 f\|_0^2 + \|f\|_0^2 = (n^4+1)\|f\|_0^2$

$\Rightarrow (g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $g_n = \frac{1}{\sqrt{n^4+1}} f_n$

$(\overline{\Delta}+1) g_n = (n^2+1) g_n = \frac{n^2+1}{\sqrt{n^4+1}} f_n$

$\Rightarrow (\overline{\Delta}+1) = \operatorname{diag}\left(\frac{n^2+1}{\sqrt{n^4+1}}\right)$

es ex. $C > 0$, s.d. $\frac{1}{C} \leq \frac{n^2+1}{\sqrt{n^4+1}} \leq C$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ insb. $\neq 0$

$(\overline{\Delta}+1)^{-1} = \operatorname{diag}\left(\frac{\sqrt{n^4+1}}{n^2+1}\right)$ $\|(\overline{\Delta}+1)^{-1}\|_{B(H^0, H^2)} \leq C$

3.) I ist kompakt (Rellich-Theorem):

$I(g_n) = g_n = \frac{f_n}{\sqrt{n^4+1}}$

$I = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{n^4+1}}\right)$ kompakt, da $\frac{1}{\sqrt{n^4+1}} \to 0$

4) $\bar{\Delta} + (V+C)I = \bar{\Delta} + I + \underbrace{(V+C-1)I}_{\text{da selbstadj}}$

ist Fredholm mit index 0, d.h. inj $\Leftrightarrow$ surj

5) Für $C \gg 0$ ist $\bar{\Delta} + (V+C)I$ injektiv

$$\langle (\bar{\Delta} + (V+C)I) f, If \rangle$$
$$= \int_0^{2\pi} \overline{-f''} f \, dt + \int_0^{2\pi} (V(t)+C) |f(t)|^2 \, dt$$
$$= \int_0^{2\pi} |f'|^2 + \int_0^{2\pi} (V(t)+C) |f(t)|^2 dt$$
$$\geq \left(\min_{t \in [0,2\pi]} V(t) + C\right) \|f\|_0^2 \geq \|f\|_0^2 \quad \text{für } C \geq 1 + \max_{t\in[0,2\pi]}(-V(t))$$
$\Rightarrow$ inj.

für solche C

$(\bar{\Delta} + (V+C)I)^{-1} : H^0 \longrightarrow H^2$ ex und ist stetig (offene Abb.)

$B := I(\bar{\Delta} + (V+C)I)^{-1} : H^0 \longrightarrow H^0$ kompakt

6) selbstadjungiert:

$\langle I(\bar{\Delta} + (V+C)I)^{-1} f, g \rangle$,

$f = D\hat{f}$ mit $D := \bar{\Delta} + (V+C)I$

$\Rightarrow \langle Bf, g \rangle = \langle BD\hat{f}, D\hat{g} \rangle = \langle \hat{f}, D\hat{g} \rangle = \langle D\hat{f}, \hat{g} \rangle =$

$= \langle f, Bg \rangle$

7) Spektralsatz

$\Rightarrow$ finde Eigenbasis (e_n) von H^0 zu B

und EW'en (μ_n), $\mu_n \to 0$, $\mu_n > 0$ $\quad \left(\begin{array}{l} Be_n = \mu_n e_n \\ DBe_n = \mu_n De_n \\ \frac{e_n}{\mu_n} = De_n \end{array} \right)$

$(\bar{\Delta} + (V+C)I) e_n = \frac{1}{\mu_n} e_n$

$(\bar{\Delta} + VI) e_n = (\frac{1}{\mu_n} - C) e_n$

$\Rightarrow$ EW von A: $\lambda_n = \frac{1}{\mu_n} - C \longrightarrow \infty$

8) Eigenfkt'en sind glatt: (Regularität)

$e_n \in H^2$, da $\in \operatorname{Im} B \subset H^2$

$\bar{\Delta} e_n = (\bar{\Delta} + (V+C)I) e_n \overset{-(V+C)I e_n}{=} \lambda_n e_n \overset{(V+C)I e_n}{} \in H^2$

$\bar{\Delta}^n e_n \in H^2$

$\rightsquigarrow e_n \in C^\infty$ (siehe Übungsaufgabe)

$\square$

Bsp:

$i\dot{\psi} = A\psi$, $\psi(0) = \psi_0$ Eigentlich $\psi(t,x)$. A wirkt auf $\psi(t,\cdot)$ $\forall t$

$e^{-tiA}\psi_0 = \psi_t$ e^{tiA} ex. wenn ich Eigenbasis habe

$\psi_0 = \sum c_n e_n$

$e^{tiA}\psi_0 = \sum e^{it\lambda_n} c_n e_n$

$\|\psi_0\|^2 = \sum |c_n|^2 = \sum |e^{it\lambda_n} c_n|^2 = \|e^{itA}\psi_0\|^2 \Rightarrow e^{itA}$ isometrisch

$A \in K(H)$, $A = A^*$, H separabel

finde $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ONB aus Eigenvektoren

zu $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lambda_n \to 0$

$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \{0\} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

$C_0(\sigma(A)) = \{f \in C(\sigma(A)),\ f(0) = 0\} \subseteq C(\sigma(A))$

- $f \in C_0(\sigma(A))$

$f(A) := \sum_{n\in\mathbb{N}} f(\lambda_n)\langle e_n, \cdot\rangle e_n$

$\sum f(\lambda_n)\langle e_n, \cdot\rangle e_n$ konvergiert in Norm

$f(A) = \mathrm{diag}(f(\lambda_n))$, da $f(\lambda_n) \longrightarrow 0$

$\Rightarrow f(A)$ kompakt, f reell $\Rightarrow$ $f(A) = f(A)^*$

$(f+g)(A) = f(A) + g(A)$

$(fg)(A) = f(A)\cdot g(A)$

$\rightsquigarrow$ bekomme einen Algebrahomomorphismus

$$\begin{aligned} C_0(\sigma(A)) &\longrightarrow K(H) \\ f &\longmapsto f(A) \end{aligned}$$

$\|f(A)\|_{B(H)} = \|f\|_\infty$

- Falls $f \in C(\sigma(A))$

$f(A) = \text{s-}\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f(\lambda_n)\langle e_n, \cdot\rangle e_n$ $f(\lambda_n) \not\to 0$ i. A.

da $f(\lambda_n)$ beschränkt, da $\sigma(A)$ kompakt

$$\begin{aligned} C(\sigma(A)) &\longrightarrow B(H) \\ f &\longmapsto f(A) \end{aligned}$$

$\|f(A)\|_{B(H)} = \|f\|_\infty$

z.B. $1(A) = \mathrm{id}_H \in B(H)$

z.B. $e^{it}(A) = e^{itA} \in K(H)$

- $A \in K(H)$, $A^*A \in K(H)$, $\cancel{\ldots}$ (A^*A selbstadj.)

$$A^*A \geq 0 \quad \text{pos. def}$$

$0 \leq \langle A^*Ax, x\rangle = \|Ax\|^2$

$\rightsquigarrow \sigma(A^*A) \subset [0, \|A\|^2]$

$\sqrt{A^*A} \in K(H)$

$\|\sqrt{A^*A}\| = \|A\| \quad (= |\sqrt{\cdot}|_{\infty, [0,\|A\|^2]}$, $\|A\|^2$ ist EW$)$

$|A| := \sqrt{A^*A}$ (analog $|z| = \sqrt{\bar{z}z}$)

definiere $U: \operatorname{Im}|A| \longrightarrow \operatorname{Im} A$
$\quad U|A|v \longmapsto Av$

$\||A|v\|^2 = \langle |A|v, |A|v\rangle = \langle v, |A|^2 v\rangle = \langle v, A^*Av\rangle = \|Av\|^2$

$\Rightarrow U$ ist wohldef. und Isometrie

$\sim$ dehnt sich stetig aus auf $U: \overline{\operatorname{Im}|A|} \longrightarrow \overline{\operatorname{Im} A}$

setze $U|_{\operatorname{Im}|A|^\perp} \equiv 0$

$U \in B(H)$, es gilt

$\boxed{U|A| = A}$ Polarzerlegung / ex. für alle $A \in B(H)$

U ist partielle Isometrie

(e_n) ONB von Eigenvektoren von $|A|$

zu EW (λ_n), $\lambda_n \longrightarrow 0$

$|A| = \sum \lambda_n \langle e_n, \ldots\rangle e_n \quad$ ($\|\,\|$-konvergent)

$A = \sum_n \lambda_n \langle e_n, \ldots\rangle Ue_n$

oder allg. $\boxed{A = \sum \lambda_n \langle e_n, \ldots\rangle f_n}$

mit e_n ONB und f_n orthog. System

nächste Stunde: Spektralsatz ohne Kompaktheit

17.7.09

$\mathbb{B}$ Banachalgebra:

Algebra, Banachraum

$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$

Bsp: $B(E)$ mit E Banach

$A \in \mathbb{B}$

$\varrho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (\lambda - A)^{-1} \in \mathbb{B} \text{ ex}\}$ Resolventenmenge (offen)

$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \varrho(A)$ Spektrum (abgeschlossen)

$\sigma(A) \subset \overline{B(0, \|A\|)}$

$(\lambda - A)^{-1} = \lambda^{-1}(1 - \frac{A}{\lambda})^{-1}$ berechnen durch geom. Reihe

$(1 - \frac{A}{\lambda})^{-1} = \sum \frac{A^n}{\lambda^n}$

$\| \frac{A^n}{\lambda^n} \| \leq \frac{1}{|\lambda^n|} \|A\|^n \rightsquigarrow$ konvergenz für $|\lambda| > \|A\|$

konv. für $|\lambda| > \limsup \sqrt[n]{\|A^n\|} =: r(A)$ (Konv.radius von Potenzreihe)

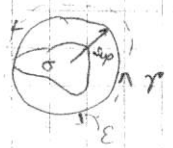
Spektralradius von A, $r(A) \leq \|A\|$

Satz:
- $\sup |\sigma(A)| = r(A)$

- $r(A) = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}$

Bew:
- $\sup |\sigma(A)| \leq r(A)$ sonst konv. Reihe

$A^k = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma z^k \frac{1}{z - A} dz$ Cauchy-Integralformel



$\frac{1}{z-A}$ ist $\|\cdot\|$-stetig in $z \in \varrho(A)$

$\int$ Riemannintegral

$\mathbb{B} = B(E)$ (Vereinfachung)

$v \in E$, $\varphi \in E'$

$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma z^k \varphi\left(\left(\frac{1}{z-A}\right)v\right) dz \overset{!}{=} \langle \varphi, A^k v \rangle = \varphi(A^k v)$

Reihenentwicklung vergleiche für große z, Weg nach ∞ schieben

$\rightarrow \|A^k\| \leq C\, |r + \varepsilon|^k$

$\limsup_k \sqrt[k]{\|A^k\|} \leq r + \varepsilon$, ε beliebig

$r(A) \leq \sup |\sigma(A)|$

- siehe Skript

$\square$

Jetzt: $\mathbb{A}$ C^*-Algebra:

Banachalgebra + $*$-Operator + C^*-Eigenschaft

Bsp: - $B(H)$ mit H Hilbert
- $A \subset B(H)$ mit A $*$-abgeschl., $\|\cdot\|$-abgeschl.
- X top. $(C_0(X), \|.\|_\infty)$ $f^* = \bar{f}$ kommut. C^*-Alg.

Lemma: $\cdot\ \sigma(A^*) = \overline{\sigma(A)}$ kompl. Konj.

$\cdot\ A = A^* \Rightarrow \sigma(A) \subset \mathbb{R}$

Bew: • klar

• $\alpha + i\beta \in \sigma(A)$, z.z. $\beta = 0$

für $\lambda \in \mathbb{R}$:

$\alpha + i(\beta + \lambda) \in \sigma(A + i\lambda)$

$$\underbrace{|\alpha + i(\beta+\lambda)|^2}_{= \alpha^2 + \beta^2 + \lambda^2 + 2\beta\lambda} \leq \|A + i\lambda\|^2 \overset{C^*,\, A=A^*}{=} \|(A+i\lambda)(A-i\lambda)\| = \|A^2 + \lambda^2\| \leq \|A\|^2 + |\lambda|^2$$

$2\beta\lambda \leq \|A\|^2 - \alpha^2 - \beta^2$, λ beliebig.

$\Rightarrow \beta = 0$

□

Bem: $\mathcal{B}$ Banachalgebra

$I \subseteq \mathcal{B}$ Ideal, $\|.\|$-abgeschl.

$\mathcal{B}/I$ ist Banachalg. mit

$\|[A]\| := \inf_{A' \in [A]} \|A'\|$

Def: Ein Charakter von $\mathcal{B}$ ist stetiger Algebrahomo.

$\chi : \mathcal{B} \to \mathbb{C}$

$X(\mathcal{B})$ Menge aller Charaktere Topologie = schwache Top. (punktweise Konvergenz)

heißt Spektrum von $\mathcal{B}$. $\mathcal{J} = \mathcal{J}(\mathcal{I})$, $\mathcal{I} := \{S_A\}_{A \in \mathcal{B}}$, $S_A^{(\chi)} := |\chi(A)|$

Bem: E Banach

E' Banach (dual) mit $\|.\|$-Top und schw.-Top.

Satz: Alaoglu

$B_{E'}(0,1)$ ist schwach präkompakt

Bew: $B_{E'}(0,1) \longrightarrow \prod_{v \in B_E(0,1)} \overline{B_{\mathbb{C}}(0,1)}$ kompakt (Tychonov)

$\varphi \longmapsto (\varphi(v))_{v\in}$

Homöo. aufs Bild mit schwacher Top.

Lemma: $\chi \in X(\mathbb{B}) \subseteq \mathbb{B}'$

- $\chi(A) \in \sigma(A)$
- $\|\chi\| = 1$

$(\rightarrow X(\mathbb{B}) \subseteq B_{\mathbb{B}'}(0,2))$

$\left.\begin{array}{l}\text{präkompakt}\\ +\text{abgeschl.}\end{array}\right\} \Rightarrow$ kompakt

Bew:

- Ang. $\chi(A) \in \rho(A)$

$1 = \chi(1) = \chi((\lambda-A)^{-1}(\lambda-A)) = \chi((\lambda-A)^{-1})(\chi(\lambda)-\chi(A)) = 0$

- $|\chi(A)| \leq \|A\| \quad \forall A \in \mathbb{B}$

$\Rightarrow \|\chi\| \leq 1$

$\|\chi\| = 1 \qquad \chi(1) = 1$

$\square$

Lemma: $\mathbb{B}$ separabel $\Rightarrow X(\mathbb{B})$ metrisierbar, denn:

Bew: $(A_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}}$ dicht, $A_\alpha \in \overline{B_{\mathbb{B}}(0,1)}$, $d(\chi, \lambda) = \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} |\chi(A_n) - \lambda(A_n)|$

Siehe Skript

$\square$

$\mathbb{B}$ kommut. Banachalgebra

Satz: (Gelfand / Mazur)

$\mathbb{B}$ Körper $\Rightarrow \mathbb{B} \simeq \mathbb{C}$ isometrisch isomorph

Bew: $A \in \mathbb{B}$

Beh: $\sigma(A) \neq \emptyset$

(sonst $\frac{1}{z-A}$ global beschränkt $\Rightarrow$ konstant nach Liouville

und 0 für $z \to \infty$, also $\frac{1}{z-A} \equiv 0$ ↯)

Sei $\lambda \in \sigma(A)$

a) $\lambda - A = 0 \Rightarrow A = \lambda$

b) $\lambda - A \neq 0 \Rightarrow (\lambda-A)^{-1}$ ex. da Körper ↯

Iso $A \longmapsto \lambda \in \mathbb{C}$ mit $\sigma(A) = \{\lambda\}$

Def: Gelfandtransformierte G_A

$A \in \mathbb{B}$

$G_A \in C(X(\mathbb{B}))$, $G_A(\chi) = \chi(A)$

Lemma: $A \longmapsto G_A$ ist Homo von Banachalgebren

$B \xrightarrow{G} C(X(B))$

$G_A(X(B)) = \sigma(A)$

Bew: Homo klar, stetig klar

$\| G \| = 1$

schon gesehen: $G_A(X(B)) \subseteq \sigma(A)$

$\lambda \in \sigma(A)$, suchen $\chi \in X(B)$ mit $\lambda = \chi(A)$

$\lambda - A$ nicht invertierbar $\Rightarrow (\lambda - A)B$ ist Ideal $\subsetneq B$

$I := \overline{(\lambda - A)B}$

J sei max. echtes Ideal abgeschl. mit $I \subset J$ (Zorn)

$B/J \simeq \mathbb{C}$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\chi"'] & B/J \arrow[r] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

$0 = \chi(\lambda - A) = \chi(\lambda) - \chi(A)$

$\Rightarrow \chi(A) = \lambda$ $\square$

Satz (Gelfand / Naimark)

Sei A komm. C^*-Alg.

Dann ist die Gelfandtrafo

$A \xrightarrow{G} C(X(A))$ ← mit $\|.\|_\infty$

ein Iso von C^*-Algebren

Anwendung: Top_c sei Kategorie der kompakten top. Räumen (damit beschränkt)

$Comm_{C^*}$ –"– kommut. C^*-Algebren mit 1

$Top_c^{op} \underset{X}{\overset{C}{\rightleftarrows}} Comm_{C^*}$ X Spektrumsfunktor

$X \longmapsto C(X)$

$(X \xrightarrow{\varphi} Y) \longmapsto \varphi^* : C(Y) \to C(X))$

mit schwacher Top. → $X(A) \longleftarrow A$

$\varphi^* \; X(B) \to X(A)$

$\varphi^* \chi = \chi \circ \varphi$

C und $\mathbb{X}$ realisieren eine Äquivalenz von Kategorien

$\mathbb{X} \circ C(X) \cong X$

$x \in X \rightsquigarrow \chi_x(f) = f(x)$

$C \circ \mathbb{X}(\mathbb{A}) \underset{G}{\cong} \mathbb{A}$

$\rightsquigarrow$ nicht-kommutative Topologie / Geometrie

Bew.: • $G_{A^*} = \overline{G_A}$
$\chi(A^*) = \overline{\chi(A)}$ $\Big\}$ z.z.

$A = \underbrace{\frac{A+A^*}{2}}_{\text{s.a.}} + i \underbrace{\frac{A-A^*}{2i}}_{\text{selbst.adj.}}$

$A^* = \frac{A+A^*}{2} - i \frac{A-A^*}{2i}$

$\Rightarrow \chi(A^*) = \overline{\chi(A)} = \underset{\mathbb{R}}{\chi\left(\frac{A+A^*}{2}\right)} - i \underset{\mathbb{R}}{\chi\left(\frac{A-A^*}{2i}\right)}$

• G ist surj.:

$G_{\mathbb{A}} \subset C(X(\mathbb{A}))$ trennt die Punkte
$1 \in G_{\mathbb{A}}$
$\overline{G_{\mathbb{A}}} \overset{c.c.}{=} G_{\mathbb{A}}$ (C^*-Alg)
$X(\mathbb{A})$ kompakt
$\Big\}$ Stone-Weierstraß $\Rightarrow G_{\mathbb{A}} \subseteq C(X(\mathbb{A}))$ ist dicht

G isometrisch: siehe Skript

$C(X(\mathbb{A}))$ vollst. $\Rightarrow G$ surj.

• G ist inj. da isometrisch

$\square$

Nächste Stunde: Spektralmaß

21.7.09

Sei X top. Raum (nicht notwendig kompakt)

$(C_b(X), \|\cdot\|_\infty)$ komm. C^*-Alg

$X \overset{i}{\hookrightarrow} \overline{X} := X(C_b(X))$ kompakt

$i(x)(f) := f(x)$

$\overline{X}$ heißt Stone-Čech-Kompaktifizierung

(Univ. Eigenschaft: Jede beschränkte stetige Fkt. auf X dehnt sich eind. zu stetiger Fkt. auf $\overline{X}$ aus.)

Bsp: $\cdot\ K \subset \mathbb{C}$ kompakt

$K = \overline{\mathring{K}}$

$(\overline{\mathrm{hol}(K)}, \|.\|_\infty)$ kommut. Banach-Alg. (nicht $*$: $\bar{f}$ nicht hol)

$K \hookrightarrow X(\overline{\mathrm{hol}(K)})$ ~~$\cong C(X)$~~

$\overline{\mathrm{hol}(K)} \subsetneq C(K)$

Def: Sei $\mathbb{A}$ C^*-Alg

$A \in \mathbb{A}$ heißt normal falls $[A, A^*] = 0$

z.B. selbstadj, unitäre

Sei A normal

$\mathbb{C}[x,y] \xrightarrow{\phi} \mathbb{A}$

$p \longmapsto p(A, A^*)$

$C(A) := \overline{\phi(\mathbb{C}[x,y])}$ C^*-Alg. kommut.

Satz: Es gibt einen Iso

$T: C(\sigma(A)) \xrightarrow{\sim} C(A)$

Bew: $X(C(A))$ kompakt

$C(X(C(A))) \xleftarrow[\sim]{G} C(A)$ Gelfand-Naimark

$G_A: X(C(A)) \twoheadrightarrow \sigma(A) \subseteq \mathbb{C}$ $A \in C(A)$

$T: C(\sigma(A)) \xhookrightarrow{G_A^*} C(X(C(A))) \xrightarrow[\sim]{G^{-1}} C(A)$ inj. & isometr.

z.z. T surj.

$\underline{I} \in C(\sigma(A))$ Inklusion $\sigma(A) \subseteq \mathbb{C}$

$T(\underline{I}) = ?$

$G(T(\underline{I}))(\chi) = G_A^*(\underline{I})(\chi) = \underline{I}(\chi(A)) = \chi(A)$

$\Rightarrow T(\underline{I}) = A$, $T(\overline{\underline{I}}) = A^*$

A, A^* in $\mathrm{Im}(T) \Longrightarrow C(A) \subseteq \mathrm{Im}(T)$

Stetiger Funktionenkalkül für normale Operatoren

A normal in $\mathbb{A}$

$T: C(\sigma(A)) \xrightarrow{\sim} C(A)$

Für $f \in C(\sigma(A))$ definieren wir $f(A) := T(f)$

(insb. $f \in \mathbb{C}[z, \bar{z}]$, dann $f(A) = f(A, A^*)$)

yp. Anwendung: $L^2(\mathbb{R}^3)$, Schrödinger-Operator $H = -\Delta + V$ (selbstadj.), $V \in C(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$

$i\dot{\psi} = H\psi \qquad \psi : \mathbb{R} \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^3)$

$R = (-\Delta + V + i)^{-1}$ normal

$f(x) = e^{it(x^{-1} - i)}$ stetig auf $\sigma(H)$? Nein (bei 0), aber messbar

$e^{itH} = e^{it(R^{-1} - i)} = f(H, R) \leftarrow$ Funktioniert noch nicht

Sei $(X, \mathcal{R})$ meßb. Raum, H Hilbert

Def.: Ein Projektorwertiges Maß auf $(X, \mathcal{R})$ ist eine Abb.

$$E : \mathcal{R} \longrightarrow \mathrm{Proj}(H) = \{ P \in B(H) \mid P^2 = P = P^* \}$$

i) $E(\emptyset) = 0$

ii) $E(X) = id$

iii) $E(U \cap V) = E(U) E(V)$

iv) $E(U \cup V) = E(U) + E(V) - E(U \cap V)$ damit das ein Projektor ist

v) $E\left(\bigcup_{i=1}^{N} U_i\right) \xrightarrow[\text{W nicht auch}]{s} E\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\right)$ mit (U_i) paarw. disjunkt

Bsp.: μ Maß auf $(X, \mathcal{R})$

$H = L^2(X, \mathcal{R}, \mu)$

$E(U) = \chi_U$ Char. Fkt.

$f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ messbar

$$\|f\|_E := \inf_{\substack{U \in \mathcal{R} \\ E(X \setminus U) = 0 \text{ (Nullmenge)}}} \sup_{u \in U} |f(u)| \qquad \text{ess sup}$$

$L^\infty(X, E) = \{$Klassen von E-wesentlich beschr. Fkt.$\}$ Banach

$f \sim g \Leftrightarrow \|f - g\|_E = 0$

$L^\infty(X, E) \xrightarrow{\int dE} B(H)$

$f = \lambda \chi_U$

$E(f) := \int f \, dE := \lambda E(U)$

lin. Ausdehnung auf einf. Fkt.

Einfache Fkt $\longrightarrow B(H)$

1) $\|E(f)\| = \|f\|_E$

2) Algebrenhomomorphismus

Bew: 2) f, g einfach: ex. Partition (A_i) von X

$f = \sum f_i \chi_{A_i} \quad g = \sum g_i \chi_{A_i}$

$fg = \sum f_i g_i \chi_{A_i}$

$E(f) = \sum f_i E(A_i)$

$E(g) = \sum g_i E(A_i)$

$E(f)E(g) = \sum f_i g_i E(A_i) = E(f \cdot g)$

$\Rightarrow E(f) = \sum f_i E(A_i)$

$\|E(f)\| = \max\{f_i \mid E(A_i) \neq 0\} = \|f\|_E$ $\square$

• dehne $\|\,\|$-stetig aus zu

$E: L^\infty(X, E) \longrightarrow B(H)$

Sei H Hilbertraum, $A = A^*$ in $B(H)$

Sei $x, y \in H$

$\mu_{x,y}: C(\sigma(A)) \longrightarrow \mathbb{C}$ lin.

$\mu_{x,y}(f) = \langle x, f(A) y\rangle$

$|\mu_{x,y}(f)| = |\langle x, f(A)y\rangle| \leq \|x\|\|y\|\|f(A)\| \leq \|x\|\|y\|\|f\|_\infty$

$\mu_{x,y} \in C(\sigma(A))'$

X komp. top. Raum: Darstellungssatz von Riesz

Satz: $C(X)' \cong$ kompl. reguläre Borelmaße $\quad f \longmapsto \int_X f \, d\upsilon$

Def: reg. Borelmaß μ auf $(X, \mathcal{B})$

$\mu(Y) = \inf\limits_{\substack{Y \subseteq U \\ \text{offen}}} \mu(U) = \sup\limits_{\substack{K \subseteq Y \\ \text{kompakt}}} \mu(K) \quad (=: \text{regulär})$

$\upsilon = a\mu_0 - b\mu_1 + ic\mu_2 - id\mu_3$

$a, b, c, d \geq 0$, μ_i reg. Borelmaße

υ komplexes reg. Borelmaß

$\mu_{x,y}$ reg. kompl. Borelmaß auf $\sigma(A)$

$\mu_{x,y}(U)$. $U \in B(\sigma(A))$

halten U fest, studieren Abhängigkeit von x, y

$(x,y) \longmapsto \mu_{x,y}(U)$ sesquilinear, beschränkt

$\mu_{x,x}(U) \geq 0$ da U positiv

$\|x\|^2 \geq \mu_{x,x}(U)$

$\Rightarrow |\mu_{x,y}(u)| \leq \|x\| \|y\|$

$\overset{\text{Satz}}{\Longrightarrow}$ $\exists$ eind. Operator $E(U) \in B(H)$ mit

$$\mu_{x,y}(U) = \langle x, E(U) y\rangle \quad \forall x,y \in H$$

Lemma: $U \to E(U)$ ist projektorwert. Maß auf $\sigma(A)$

$E: L^\infty(\sigma(A), E) \longrightarrow B(H)$

$E(I^n) = A^n, \ E(\overline{I}) = A^*$

$f(A) := E(f)$

- μ auf $\mathbb{R}$

$\mu = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{atome}}}{\mu_p} + \mu_c$ eind. Zerlegung

$\mu_c = \underset{\substack{\shortparallel \\ f \cdot |.| \\ \uparrow \\ \text{Lebesguemaß}}}{\mu_{ac}} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{singulärstetig Teil}}}{\mu_{sc}}$

- $A = A^*$

$x \in \begin{cases} H_p \\ H_{ac} \\ H_{sc} \end{cases} \Rightarrow U \mapsto \langle x, E_A(U) x\rangle$ atomar / abs. stetig / sing. stetig

$H = H_p \oplus H_{ac} \oplus H_{sc}$

Bsp: QM: H_p gebundene Zustände

H_{ac} Streuzustände