19.6.09

Funktionalanalysis

W, V endl. dim komplexe VR.

$A: W \to V$ linear, $v \in V$

Problem: $Ax = v$

$x \in W$ gesucht

- lösbar, wenn $v \in \mathrm{Im}(A)$

$V \xrightarrow{\pi} V/\mathrm{Im}(A) =: \mathrm{Coker}(A)$

$v \in \mathrm{Im}(A) \Leftrightarrow [v] = 0$ in $\mathrm{Coker}(A)$

das sind $\dim \mathrm{Coker}(A)$ viele lin. Bedingungen

z.B. wähle Basis $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ von $\mathrm{Coker}(A)'$

Problem lösbar gdw. $\varphi_i(\pi(v)) = 0 \quad \forall i$

- wenn lösbar, dann hat Lösung L die Struktur $L = x_0 + \ker A$

wobei $x_0 \in W$ eine Lösung

L ist ein $\dim \ker A$-dim. affiner Raum

- $\dim \ker - \dim \mathrm{Coker} = \dim W - \dim V$

$=: \text{index } A$

Bsp für unendl. dim

$P = \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid f(x + 2\pi) = f(x) \}$

$A: P \to P, \ Af = f'$

$Af = h$

$h \in \mathrm{Im}\, A, \quad h = g', \quad \int_0^{2\pi} h(u)\, du = g(2\pi) - g(0) = 0$

das ist die einzige Bed. für $h \in \mathrm{Im}\, A$

$\varphi: P \to \mathbb{C}$

$\varphi(h) = \int_0^{2\pi} h(u)\, du$

$Af = h$ lösbar, wenn $\varphi(h) = 0$

$f(v) = \int_0^v h(u)\, du + c$

$\ker A = \{ \text{const. Fkt} \}$, $\dim \ker A = 1$

$\dim \operatorname{Coker}(A) = 1$ (eine lin. Bed.)

$\Rightarrow$ index $A = 0$

- $\Delta = -\sum_i \partial_i^2$ nicht beschränkt

  $\Delta : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 2$

  Δ ist surj

  $\dim \ker \Delta = \infty$

  fällt aus der Theorie raus

- Sei V endl. dim. komplexer VR

  $A : V \to V$ lin.

  $\dot{v} = Av$, $v(0) = v_0 \in V$

  hat eind. Lsg.

  „formal" $v = e^{tA} v_0$

  mit $e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n A^n$ + Konvergenzbetrachtung

  $\langle , \rangle$ Skalarprodukt auf V

  A bzgl. $\langle , \rangle$ selbstadjungiert, d.h. $\langle Av, v' \rangle = \langle v, Av' \rangle$

  dann ex ONB $v_1, \dots, v_r$ aus Eigenvektoren

  in dieser Basis $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_r \end{pmatrix}$ mit $\lambda_i \in \mathbb{R}$

  $\Rightarrow e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{t\lambda_r} \end{pmatrix}$

  $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}$, $\lambda_i \in U$

  $f(A) := \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f(\lambda_r) \end{pmatrix}$

  z.B. wenn 0 kein EW, dann $A^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_r^{-1} \end{pmatrix}$

  z.B. $f(x) = x^n \rightsquigarrow f(A) = A^n$ verträgl. mit Polynomen

- $\mathbb{R}^3$ Wärmeleitung

Temperaturverteilung zur Zeit $t = 0$

$\rho_0 \in C_c(\mathbb{R}^3)$

$\Rightarrow -\Delta \varrho = \dot{\varrho}$

$e^{-t\Delta} \varrho_0 \overset{?}{=} \varrho(t)$

$\varrho(t) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ (Lösung ligt hier drin)

$\Delta : L^2(\mathbb{R}^3) \to L^2(\mathbb{R}^3)$ nicht auf ganz L^2 definiert sondern auf $C^2(\mathbb{R}^3) \cap L^2(\mathbb{R}^3)$

$e^{-t\Delta} \overset{?}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Delta^n t^n$ konvergent?

für die meisten Fkt nicht, aber in dichten Unterraum

$e^{-t\Delta}$ kann konstruiert werden (stetig ausdehnen)

$\Rightarrow (e^{-t\Delta} \varrho)(x) = \frac{1}{(2\pi t)^{3/2}} \int e^{\frac{|x-y|^2}{2t}} \varrho_0(y)\, dy$

$\langle \Delta \varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, \Delta \psi \rangle$ symmetrisch

- kann auch $(\Delta + i)^{-1}$ definieren oder $\ln(\Delta + 1)$

Ziele:

- Fredholmtheorie
- Spektralsatz für selbstadj. Operatoren

Hilberträume

E $\mathbb{C}$-V.R.

$\langle , \rangle$ Sesquilinearform

$\langle , \rangle \; \underset{\text{antilin.}}{E} \times \underset{\text{linear}}{E} \to \mathbb{C}$

Bsp:

- $\mathbb{C}$

$\langle z, z' \rangle = -\bar{z} z'$ (sym.)

- $\mathbb{C}^2$

$\langle z_1, z_2' \rangle = \bar{z}_1 z_2'$ (nicht sym.)

- $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$

$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}^3} \bar{f} g$ (sym) (nicht neg) (positiv)

Def:

- Symmetrisch $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
- nicht negativ: $\langle x, x \rangle \geq 0$
- positiv: nicht negativ + $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$