Glatte Topologie

Ulrich Bunke*

8. Juni 2004

Inhaltsverzeichnis

*Göttingen, bunke@uni-math.gwdg.de

1 Der Satz von Sard

Konventionsgemäß ist der unterliegende topologische Raum einer glatten Mannigfaltigkeit metrisierbar und hat eine abzählbare Basis. Wenn also $\mathbb{R}^\delta$ die reellen Zahlen mit der diskrete Topologie bezeichnet, dann sind $\mathbb{R}^\delta$ oder $\mathbb{R}^\delta \times \mathbb{R}$ keine 0- oder 1-dimensionalen Mannigfaltigkeiten.

Seien X, Y glatte Mannigfaltigkeiten und $f : X \to Y$ eine glatte Abbildung.

Definition 1.1. *1. Ein Punkt $x \in X$ heißt kritisch, wenn* $\mathtt{im}(df(x)) \neq T_{f(x)}Y$.

2. Ein Punkt $y \in W$ heißt regulärer Wert, wenn $f^{-1}(\{y\})$ keine kritischen Punkte enthält.

3. Ein Punkt $y \in Y$ ist ein kritischer Wert, wenn er nicht regulär ist.

Die Maßklasse des Lebesgueschen Maßes auf einer glatten n-dimensionalen Mannigfaltigkeit ist wohldefiniert. In der Tat ist diese Maßklasse auf offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ invariant unter Diffeomorphismen. Damit können Lebesgue-Nullmengen auf einer Mannigfaltigkeit dadurch charakterisiert werden, daß sie lokal durch Karten auf Lebesgue-Nullmengen von $\mathbb{R}^n$ abgebildet werden. Wir werden diese Mengen im folgenden einfach Nullmengen nennen.

Satz 1.2 (Satz von Sard). *Die Menge der kritischen Werte von f ist eine Nullmenge.*

Proof. Wir nutzen aus, daß die Topologie von X eine abzählbare Basis hat, um auf den folgenden Spezialfall zu reduzieren:

$$Y = \mathbb{R}^p, \quad X \subset \mathbb{R}^n \text{ offen} .$$

Wir beweisen den Satz durch vollständige Induktion nach n. Ist $n = 0$, so ist die Aussage trivial. Wir nehmen nun an, daß der Satz für $n-1$-dimensionale Bildmannigfaltigkeiten schon bewiesen ist.

Wir definieren $E_0 := E$ als die Menge der kritischen Punkte von f und

$$E_m := \{x \in X | \, |1 \leq |\alpha| \leq m \Rightarrow D^\alpha f(x) = 0\} .$$

Es gilt $\cdots \subset E_{m+1} \subset E_m \subset \cdots \subset E_0$.

Der Induktionsschritt folgt aus den folgenden beiden Lemmas.

Lemma 1.3. *Für jedes $m \geq 0$ ist $f(E_m \setminus E_{m+1})$ eine Nullmenge.*

Lemma 1.4. *Für $m \geq \frac{n}{p}$ ist $f(E_m)$ eine Nullmenge.*

Proof. [Lemma 1.3] Es genügt, folgende Aussage zu zeigen: *Für jedes $x_0 \in E_m \setminus E_{m+1}$ existiert eine offene Umgebung $x_0 \in V \subset X$ derart, daß $f(E_m \cap V)$ eine Nullmenge ist.* Wir schreiben $f = (f_1, \ldots, f_n)$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit (nach Permutationen der Koordinaten in Y und X können wir erreichen, daß $D^1 D^\alpha f_1(x_0) \neq 0$ für einen Multiindex mit $|\alpha| = m$. Wir definieren die Funktion $w := D^\alpha f_1$ und setzen $h(x) := (w(x), x_2, \ldots, x_n)$. Da $D^1 w(x_0) \neq 0$ gilt, ist $dh(x_0)$ invertierbar. Damit existiert eine Umgebung V von x_0 derart, daß $h : V \to W := h(V)$ ein Diffeomorphismus ist. Wir setzen $g := f \circ h^{-1} : W \to \mathbb{R}^n$. Wir unterscheiden nun die Fälle $m = 0$ und $m \geq 1$.

Sei $m = 0$. Sei $E' := h(E \cap V)$ die Menge der kritischen Punkte von g. Wir zeigen, daß $g(E')$ eine Nullmenge ist. Es gilt $g_1(x) = x_1$ für jedes $x \in W$. Wir zerlegen $x = (x_1, x')$ und setzen $g(x) = (x_1, g_{x_1}(x'))$. Folglich ist

$$dg(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & dg_{x_1}(x') \end{pmatrix} .$$

Sei $E'_{x_1} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ die Menge der kritischen Punkte von g_{x_1}. Wir sehen, daß $(x_1, x') \in E'$ genau dann gilt, wenn $x' \in E'_{x_1}$, also $g(E') = \cup_{x_1} \{x_1\} \times g_{x_1}(E'_{x_1})$.

Die Menge E' ist abgeschlossen in W und damit eine abzählbare Vereinigung kompakter Teilmengen. Damit ist auch $g(E')$ eine abzählbare Vereinigung kompakter Teilmengen und ebenfalls meßbar. Nach Induktionsvoraussetzung ist $g_{x_1}(E'_{x_1}) \subset \mathbb{R}^{p-1}$ eine Nullmenge. Nun folgt aus dem Satz von Fubini, daß E' eine Nullmenge ist.

Sei nun $m \geq 1$. Dann gilt $w(x) = 0$ für alle $x \in E_m$. Also ist $h(E_m \cap V) \subset \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$. Wir setzen $g_0(x') := g(0, x')$. Ist $x \in h(E_m \cap V)$, dann ist x' kritischer Punkt von g_0. Damit ist $g_0(h'(E_m \times V))$ nach Induktionsvoraussetzung eine Nullmenge, wobei $h = (h_1, h')$ gesetzt wurde. Diese stimmt aber mit $f(E_m \cap V)$ überein. □

Proof. [Lemma 1.4] Wir betrachten für $q \geq 1$ auf $\mathbb{R}^q$ die Norm $\|x\| = \mathtt{max}_i |x_i|$. Mit $I(x, a)$ bezeichnen wir den Ball vom Radius $a > 0$ um x in dieser Norm. Es genügt, die folgende Aussage zu zeigen. *Für jedes $x \in X$ und $a > 0$ mit $I(x, a) \subset X$ ist $f(E_m \cap I(x, a))$ eine Nullmenge.*

Sei $M := \sup_{|\alpha|=m+1, y\in I(x,a)} |D^\alpha f(y)|$. Dann gilt für $y \in E_m \cap I(x,a)$ und $z \in I(x,a)$, daß $|f(y)-f(z)| \leq M\|y-z\|^{m+1}$. Sei nun $N > 1$. Wir unterteilen den Würfel $I(x,k)$ regelmäßig in N^n Würfel der Form $I(u,a/N)$. Dann ist $f(E_m \cap I(x,a)) = \cup f(E_m \cap I(u,a/N))$. Wenn $f(E_m \cap I(u,a/N)) \neq \emptyset$, dann ist der Durchmesser von $(f(E_m \cap I(u,a/N))$ kleiner als $M(\frac{a}{N})^{m+1}$. Es gilt also

$$|f(E_m \cap I(x,a))| \leq N^n M^p (\frac{a}{N})^{\frac{p}{m+1}} \ .$$

Wegen $n - \frac{p}{m+1} < 0$ muß $|f(E_m \cap I(x,a))| = 0$ gelten, da N beliebig groß gewählt werden kann. □

2 Transversalität

Seien X, Y, Z glatte Mannigfaltigkeiten und $f : X \to Z$, $g : Y \to Z$ glatte Abbildungen. Wir betrachten das Cartesische Quadrat

$$\begin{array}{ccc} Y \times_Z X & \to & X \\ \downarrow & & f \downarrow \\ Y & \stackrel{g}{\to} & Z \end{array} \qquad (1)$$

in der Kategorie der topologischen Räume.

Definition 2.1. *Die Abbildungen f und g sind zueinander transversal, falls für jedes $(y,x) \in Y \times_Z X$ mit $z = f(x) = g(y)$ gilt:*

$$\mathtt{im}(df(x)) + \mathtt{im}(dg(y)) = T_z Z \ .$$

Wir behalten die Bezeichnungen aus 2.1 bei.

Satz 2.2. *Wenn f und g zueinander transversal sind, dann besitzt $Y \times_Z X$ eine eindeutige Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit derart, daß (1) ein Cartesisches Diagramm in der Kategorie der glatten Mannigfaltigkeiten ist.*

Proof. Die Eindeutigkeit der glatten Struktur folgt nach universellen Überlegungen aus der Eindeutigkeit des gefaserten Produktes. Wir müssen hier also die Existenz einer solchen Struktur nachweisen.

Wir konstruieren die glatte Struktur lokal. Wir können dazu annehmen, daß Y, X, Z offene Teilmengen in $\mathbb{R}^{n_Y}, \mathbb{R}^{n_X}, \mathbb{R}^{n_Z}$ sind. Dann wird $Y \times_Z X$ als Teilmenge von $\mathbb{R}^{n_Y} \times \mathbb{R}^{n_X}$ als Nullstellenmenge der Funktion $h : Y \times X \to \mathbb{R}^{n_Z}$, $h(y,x) := f(x) - g(y)$, beschrieben. Die Transversalität von f und g besagt genau, daß h eine definierende Funktion von $Y \times_Z X \subset \mathbb{R}^{n_Y} \times \mathbb{R}^{n_X}$ als reguläre Untermannigfaltigkeit ist. Damit wird eine glatte Struktur festgelegt.

Immer noch die lokale Situation betrachtend zeigen wir jetzt, daß (1) ein Cartesisches Diagramm in der Kategorie von glatten Mannigfaltigkeiten ist.

Sei dazu ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc} W & \stackrel{r}{\to} & X \\ s\downarrow & & f\downarrow \\ Y & \stackrel{g}{\to} & Z \end{array}$$

von glatten Mannigfaltigkeiten gegeben.

Dann existiert eine eindeutige Faktorisierung[1] $h : W \to Y \times_Z X$, von welcher wir a priori wissen, daß sie stetig ist. Wir weisen ihre Glattheit nach, indem wir für jede glatte Funktion $\phi : Y \times_Z X \to \mathbb{R}$ zeigen, daß $h^*\phi$ glatt ist. Nun besitzt aber ϕ eine glatte Ausdehnung[2] $\tilde{\phi} : X \times Y \to \mathbb{R}$. Die Funktion $(s,r)^*\tilde{\phi}$ ist glatt und stimmt mit $h^*\phi$ überein.

Wir haben damit den Satz im Fall gezeigt, daß X, Y, Z globale Karten besitzen. Aus der Eindeutigkeit des Faserproduktes folgt, daß die glatte Struktur auf $Y \times_Z X$ unabhängig von der Wahl der Karten ist.

Wenden wir im allgemeinen Fall die obige Konstruktion auf Kartenumgebungen an, dann finden deshalb eine eindeutig bestimmte globale glatte Struktur auf $Y \times_Z X$. Diese macht (1) Cartesisch in der Kategorie der glatten Mannigfaltigkeiten. □

Wir werden die folgende Beobachtung benötigen. Sei $t \in \mathbb{R}$ und $i_t : * \to \mathbb{R}$ die Einbettung. Ist X eine glatte Mannigfaltigkeit, dann betrachten wir das folgende

[1] Wir wissen ja schon, daß $Y \times_Z X$ das Faserprodukt in der Kategorie der topologischen Räume ist.

[2] Jede glatte Funktion auf einer regulären Untermannigfaltigkeit ist Einschränkung einer glatten Funktion auf dem umgebenden Raum.

Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} * \times_{\mathbb{R}} X & \to & \mathbb{R} \times X \\ \downarrow & & \mathtt{pr}_1 \downarrow \\ * & \stackrel{i_t}{\to} & \mathbb{R} \end{array}$$

Lemma 2.3. *Die Abbildungen i_t und $\mathtt{pr}_1$ sind zueinander transversal. Es gibt einen natürlichen Diffeomorphismus $* \times_{\mathbb{R}} \mathbb{R} \times X \cong X$.*

Im allgemeinen sind zwei vorgegebene Abbildungen nicht zueinander transversal. Wir werden zeigen, daß man Transversalität erreichen kann, wenn man f durch eine glatte Homotopie abändert.

Definition 2.4. *Zwei Abbildungen $f_0, f_1 : X \to Z$ heißen glatt homotop, falls es eine zusammenhängende offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}$, $t_0, t_1 \in U$, und eine glatte Abbildung $F : U \times X \to Z$ derart gibt, daß das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} X & \stackrel{(i_{t_j}, \mathtt{id}_X)}{\to} & U \times X \\ f_j \downarrow & & (\mathtt{id}_U \circ \mathtt{pr}_1, F) \downarrow \\ Z & \stackrel{(i_{t_j}, \mathtt{id}_Z)}{\to} & U \times Z \end{array}$$

für $j = 0, 1$ Cartesisch ist.

Aufgabe 2.1. *Zeige, daß glatte Homotopie eine Äquivalenzrelation ist.*

Satz 2.5. *Sei ein Diagram*

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & & f \downarrow \\ Y & \stackrel{g}{\to} & Z \end{array} \qquad (2)$$

glatter Abbildungen gegeben. Sei $A \subset X$ abgeschlossen und sei die Einschränkung von f auf eine geeignete Umgebung von A transversal zu g.

Dann existiert eine Abbildung $\tilde{f} : X \to Z$ mit

1. *$f_{|A} = \tilde{f}_{|A}$,*
2. *$\tilde{f}$ ist zu f glatt homotopy durch eine Homotopie, welche auf A konstant ist,*
3. *$\tilde{f}$ und g sind zueinander transversal.*

Wir erkären zuerst eine Konstruktion. Sei $A \subset X$ eine abgschlossene Teilmenge von M derart, daß

$$\mathtt{im}(df(x)) + \mathtt{im}(dg(y)) = T_z Z \ .$$

für alle $(y, x) \in Y \times_Z X$ mit $x \in A$ gilt. Sei weiter $U \subset Z$ offen und $\psi : U \to \mathbb{R}^n$ eine Karte. Schließlich wählen wir eine kompakte Teilmenge $V \subset X \setminus \mathtt{int}(A)$ mit $f(V) \subset U$ und eine Funktion $\phi \in C_c^\infty(X)$ mit $\mathtt{supp}(\phi) \subset V$ und $\phi(x) > 0$ für $x \in \mathtt{int}(V)$.

Für $b \in \mathbb{R}^n$ betrachten wir nun die Abbildung $f_{\psi,b} : V \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto f_\psi(x) + \phi(x)b$, wobei $f_\psi = \psi \circ f_{|V}$. Es existiert ein $\epsilon > 0$ derart, daß für $\|b\| < \epsilon$ gilt: $f_{\psi,b}(x) \in \psi(U)$. Wir erhalten dann eine glatte Abbildung $f_b : X \to Z$ durch

$$f_b(x) := \left(\begin{array}{cc} f(x) & x \in X \setminus V \\ \psi^{-1}(f_{\psi,b}(x)) & x \in \mathtt{int}(V) \end{array} \right. \ .$$

Sei $W := g^{-1}(U) \subset Y$. Wir definieren $g_\psi : W \to \mathbb{R}^n$ durch $g_\psi := \psi \circ g$. Wir führen die Abbildung

$$h : W \times \mathtt{int}(V) \to \mathbb{R}^n, \quad h(y, x) = u^{-1}(x)(f_\psi(x) - g_\psi(y))$$

ein betrachten einen regulären Wert $b \in \mathbb{R}^n$ von h mit $\|b\| < \epsilon$.

Sei nun $(y, x) \in Y \times \mathtt{int}(V)$ derart, daß $f_b(x) = g(y)$. Dann gilt $y \in W$ und $f_\psi(x) + \phi(x)b - g_\psi(y) = 0$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} \mathtt{im}(df_{b,\psi}(x) - dg_\psi(y)) &= \mathtt{im}(df_\psi(x) + du(x)b - dg_\psi(y)) \\ &= \mathtt{im}(df_\psi(x) - dg_\psi(y) - du(x)u^{-1}(x)(f_\psi(x) - g_\psi(y)) \\ &= \mathtt{im}(\phi(x)[\phi^{-1}(x)(df_\psi(x) - dg_\psi(y)) - du(x)u^{-2}(x)(f_\psi(x) - g_\psi(y))]) \\ &= \mathtt{im}(\phi(x)dh(y, x)) \\ &= \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Folglich gilt $\mathtt{im}(df_b(x)) - \mathtt{im}(dg(y)) = T_z Z$ mit $z = g(y) = f_b(x)$. Nach dem Satz von Sard hat die Menge der regulären Werte von h volles Lebesguemaß. Deshalb existiert für jedes $0 < \delta < \epsilon$ ein regulärer Wert $b \in \mathbb{R}^n$ von h mit $\|b\| < \delta$.

Die Abbildung $f_b : X \to Z$ stimmt auf A mit f überein und erfüllt die Bedingung

$$\mathtt{im}(df(x)) + \mathtt{im}(dg(y)) = T_z Z$$

für alle $(y, x) \in Y \times_Z X$ mit $x \in A \cup \mathtt{int}(V)$.

Wir kommen nun zum Beweis des Satzes. Sei eine stetige Kontrollfunktion $r : X \to (0, \infty)$ und eine die Topologie von Z induzierende Metrik d auf Z vorgegeben. [3]

Lemma 2.6. *Es gibt eine glatte Abbildung $\tilde{f} : X \to Z$ mit*

1. $\tilde{f}_{|A} = f_{|A}$,
2. $d(f(x), \tilde{f}(x)) < r(x)$ *für alle* $x \in X$
3. $\tilde{f}$ *ist zu* g *transversal.*

Proof. Wir überdecken Z mit Kartenumgebungen (U_α). Wir wählen weiter eine lokal endliche Überdeckungen $(\tilde{V}_l)_{l \in \mathbb{N}}$, $(\tilde{V}_l')_{l \in \mathbb{N}}$ mit $\tilde{V}_l' \subset \mathtt{int}\tilde{V}_l$ von X durch kompakte Umgebungen derart, daß für jedes $l \in \mathbb{N}$ und geeigenetes α gilt: $f(\tilde{V}_l) \subset U_\alpha$. Wir definieren nun induktiv abgeschlossene Teilmengen $A_0 := A$, $V_k := \tilde{V}_k \setminus \mathtt{int}(A_{k-1})$ und $A_k := A_{k-1} \cup \tilde{V}_k'$. Weiterhin wählen wir Funktionen $\phi_k \in C_c^\infty(X)$ mit $\mathtt{supp}(\phi_k) \subset V_k$ und $\phi_k(x) > 0$ falls $x \in \mathtt{int}(V_k)$.

Wir konstruieren $\tilde{f}$ mit einem induktiven Prozess. Sei $\tilde{f}_0 := f$. Sei $k \in \mathbb{N}$. Wir nehmen an, wir hätten eine glatte Abbildung $\tilde{f}_{k-1} : X \to Z$ konstruiert, welche die folgenden Eigenschaften hat:

I(k) $d(f(x), \tilde{f}_{k-1}(x)) < (1 - 2^{-k}) r(x)$ für alle $x \in X$

J(k) Für jedes $(y, x) \in Y \times_Z X$ mit $x \in A_{k-1}$ gilt $\mathtt{im}(d\tilde{(f_{k-1}}(x)) + \mathtt{im}(d(g(y)) = T_z Z$, wobei $z = g(y)$ ist.

Wir wenden nun die Konstruktion auf $f := \tilde{f}_k$, $A := A_{k-1}$ und $V := V_k$. Wir setzen $\tilde{f}_k := \tilde{f}_{k-1,b}$. Wenn wir $\delta > 0$ genügend klein wählen, dann folgt aus $\|b\| < \delta$, daß $d(\tilde{f}_{k-1}(x), \tilde{f}_k(x)) < 2^{-k-1} r(x)$ für alle $x \in V$ gilt. Daraus folgt $I(k+1)$. Nach Konstruktion gilt auch $J(k+1)$. Der Grenzwert $\tilde{f} := \lim_{k \to \infty} \tilde{f}_k$ existiert und erfüllt die geforderten Bedingungen. □

[3] Die unterliegende Topologie einer Mannigfaltigkeit ist metrisierbar.

Wir wählen nun eine Riemannsche Metrik auf Z. Sei d der induzierte Abstand. Wir wählen die stetige Funktion $r : X \to (0, \infty)$ derart, daß für jedes $x \in X$ die Exponentialabbildung $\exp_{f(x)} : T_{f(x)}Z \to Z$ auf dem Ball $\{v \in T_{f(x)}Z | \|v\| < 3r(x)\} \subset T_{f(x)}Z$ ein Diffeomorphismus ist. Sei nun $\tilde{f}$ eine Funktion, welche den Bedingungen im Lemma 2.6 genügt. Wir müssen nur noch zeigen, daß f und $\tilde{f}$ glatt homotop sind. In der Tat können wir eine Homotopie $F : (-1, 2) \times X \to Z$ durch die Formel

$$F(t, x) := \exp_{f(x)}(t \exp^{-1}_{f(x)}(\tilde{f}(x))$$

angeben. □

Gelegentlich werden wir die folgenden Erweiterungen benötigen.

Aufgabe 2.2. *Zeige, daß man f gleichzeitig transversal zu einer abzählbaren Menge $g_i : Y_i \to Z$ von Abbildungen machen kann.*

Aufgabe 2.3. *Wenn f eigentlich ist, dann kann man erreichen, daß auch $\tilde{f}$ und die Homotopie $F : [0, 1] \times X \to Z$ eigentlich sind.*

Hinweis: Man wähle die Kontrollfunktion $r : X \to (0, 1]$ eigentlich und die Metrik d auf Z vollständig. Sei $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X mit $\tilde{f}(x_i) \to z$.

Wir nehmen an, daß $x_i \to \infty$. Dann gilt $r(x_i) \to 0$ da r eigentlich ist. Also gilt $d(f(x_i), \tilde{f}(x_i)) \to 0$ und wegen der Vollständigkeit von d auch $f(x_i) \to z$. Da aber f eigentlich war, kann nicht $x_i \to \infty$ gelten.

3 Kobordismus

3.1 Zyklen

In diesem Kapitel betrachten wir die grundlegende geometrischen Konstruktionen der Kobordismustheorie. In folgenden Kapiteln werden wir normale Strukturen hinzufügen.

Sei X eine glatte Mannigfaltigkeit.

Definition 3.1. *1. Ein Präzyklus über X ist ein Paar (A, p), wobei A eine glatte Mannigfaltigkeit und $p : A \to W$ eine glatte Abbildung ist.*

2. Der Präzyklus ist rein vom Grad $n \in \mathbb{Z}$, wenn $\dim_x(X) - \dim_{p^{-1}(x)}(A) = n$ für alle $x \in X$ gilt.

3. (A, p) ist ein Zyklus, wenn p eigentlich ist.

Sei $f : Y \to X$ und (A, p) ein Präzyklus derart, daß p und f transversal sind.

Definition 3.2. *Wir definieren die Zurückziehung $f^*(A, p) := (Y \times_A X, f^*p)$, wobei*

$$\begin{array}{ccc} Y \times_X A & \to & A \\ f^*p \downarrow & & p \downarrow \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

cartesisch ist.

Ist $f : X \to Y$ eine glatte Abbildung.

Definition 3.3. *Wir definieren das Integral $f \circ (A, p) := (A, f \circ p)$.*

Sei (B, q) ein Präzyklus über Y.

Definition 3.4. *Wir definieren das Produkt $(A, p) \times (B, q) := (A \times B, p \times q)$ über $X \times Y$.*

Lemma 3.5. *1. Die Zurückziehung eines Zyklus ist ein Zyklus.*

2. Die Zurückziehung eines reinen Präzyklus vom Grad n ist ein reiner Präzyklus vom Grad n.

3. Das Integral eines Zyklus bezüglich einer eigentlichen Abbildung ist wieder ein Zyklus.

4. Das Produkt von Zyklen ist ein Zyklus.

5. Das Produkt von reinen Präzyklen der Dimensionen n und m ist ein reiner Präzyklus der Dimension $n + m$.

Sei $(B, (f, q))$ ein Präzyklus über $\mathbb{R} \times X$. offen.

Definition 3.6. *$(B,(f,q))$ ist ein Bordismusdatum bezüglich $U \subset \mathbb{R}$, falls für jedes kompakte $K \subset U$ die Abbildung $q_{|f^{-1}(K)} : f^{-1}(K) \to X$ eigentlich ist.*

Wir betrachten ein Bordismusdatum $(B,(f,q))$ bezüglich $U \subset \mathbb{R}$ über X.

Definition 3.7. *$t \in U$ ist ein regulärer Wert von $(B,(f,q))$, wenn t ein regulärer Wert von f ist.*

Sei $i_t : X \to \mathbb{R} \times X$ die Abbildung $i_t(x) = (t,x)$. Ist t ein regulärer Wert von $(B,(f,q))$, dann ist (f,q) zu i_t transversal.

Definition 3.8. *Für einen regulären Wert $t \in U$ von $(B,(f,q))$ definieren wir den Zyklus*

$$\partial_t(B,(f,q)) := i_t^*(B,(f,q)) \ .$$

Wir betrachten ein Bordismusdatum $(B,(f,q))$ bezüglich $U \subset \mathbb{R}$ über X.

Definition 3.9. *Ein Kragen für $(B,(f,q))$ bei $t \in U$ besteht aus einer offenen Umgebung $V \subset \mathbb{R} \times X$ von $i_t(X)$ und cartesischen Diagrammen*

$$\begin{array}{ccccc} i_t^*B & \stackrel{c}{\leftarrow} & j^*B & \stackrel{J}{\rightarrow} & B \\ i_t^*q\downarrow & & j^*q\downarrow & & q\downarrow \\ X & \stackrel{\mathrm{pr}_2}{\leftarrow} & V & \stackrel{j}{\rightarrow} & \mathbb{R}\times X \end{array} ,$$

wobei $j : V \to \mathbb{R} \times X$ die Inklusion ist.

Wenn $(B,(f,q))$ einen Kragen bei t besitzt, dann ist t ein regulärer Wert von $(B,(f,q))$.

Zwei Präzyklen (A,p) und (A',q') über X sind isomorph (wir schreiben $(A,p) \cong (A',p')$), wenn es einen Diffeomorphismus $\phi : A \to A'$ mit $p' \circ \phi = p$ gibt.

Wir betrachten ein Bordismusdatum $(B,(f,q))$ bezüglich $U \subset \mathbb{R}$ über X. Sei $t \in U$ ein regulärer Wert von $(B,(f,q))$.

Lemma 3.10. *Es gibt für vorgegebenes $\epsilon > 0$ eine zu q glatt homotope Modifikation q_1 derart daß $(B,(f,q_1))$ ein Bordismusdatum über X bezüglich U ist, $\partial_t(B,(f,q)) \cong \partial_t(B,(f,q_1))$ gilt, und zusätzlich*

1. *$(B,(f,q_1))$ einen Kragen bei t besitzt, und*

2. $q = q_1$ *auf* $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus (t-\epsilon, t+\epsilon))$ *gilt.*

Proof. Sei ∂_t das Vektorfeld auf $\mathbb{R} \times X$, welches die Translation in die $\mathbb{R}$-Richtung erzeugt. Weil t ein regulärer Wert von f ist, muß es eine offene Umgebung $Z \subset B$ von $f^{-1}(t)$, geben, auf welcher df nicht verschwindet. Sei $K \subset (t-\epsilon, t+\epsilon) \cap U$ eine kompakte Umgebung von t. Wir wählen ein Vektorfeld $T \in C^\infty(B, TB)$ derart, daß $\mathtt{supp}(T) \in f^{-1}(K)$ und $df(T) = -\partial_t$ auf einer Umgebung $Y \subset f^{-1}(K) \cap Z$ von $f^{-1}(t)$ gilt. Da die Einschränkung von q auf $f^{-1}(K)$ eigentlich ist, gibt es eine offene Umgebung $R \subset \mathbb{R} \times X$ von $\{t\} \times X$ derart, daß der Fluß $\Phi_s(b)$ von T für alle $b \in B$ mit $(f(b)+s, q(b)) \in R$ definiert ist. Wir wählen eine Funktion $\chi \in C_c^\infty(R)$ derart, daß $\{\chi = 1\}$ in einer Umgebung $V \subset \bar{V} \subset R$ von $i_t(X)$. Wir können ferner annehmen, daß $b^{-1}(V) \subset Y$.

Wir definieren nun $h : B \to B$ durch $h(b) := \Phi_{\chi((f,q)(b))(f(b)-t)}(b)$. Dann gilt $h(b) = b$ falls $f(b) \notin K$ oder $f(b) = t$. Wenn $b \in (f,q)^{-1}(V)$, dann gilt $f(h(b)) = t$. Wir setzen nun $p_1 = p \circ h$.

Wir haben eine Homotopie h_s von $\mathtt{id}_B$ nach h, $h_s(b) := \Phi_{s\chi((f,q)(b))(f(b)-t)}(b)$. Also ist q_1 glatt homotop zu q.

Wir definieren c auf $(f, q_1)^{-1}(V)$ durch $c(b) := h(b)$. Dann haben wir die folgenden cartesischen Diagramme

$$\begin{array}{ccccc} i_t^* B & \stackrel{c}{\leftarrow} & j^* B & \stackrel{J}{\rightarrow} & B \\ i_t^* q_1 \downarrow & & j^* q_1 \downarrow & & q_1 \downarrow \\ X & \stackrel{\mathtt{pr}_2}{\leftarrow} & V & \stackrel{j}{\rightarrow} & \mathbb{R} \times X \end{array} .$$

Wir sehen nun leicht ein, daß $(B, (f, q_1))$ alle geforderten Eigenschaften hat. □

3.2 MO(X)

Wir können die Menge der Isomorphieklassen $Z(X)$ von Zyklen $[A, q]$ bilden. Diese Menge besitzt eine abelsche Halbgruppenstruktur durch $[A, p] + [B, q] := [A \sqcup B, p \sqcup q]$. Das neutrale Element ist $[\emptyset, p] \in Z(X)$.

Lemma 3.11. *Jede Klasse* $[A, p] \in Z(X)$ *kann in eine Summe von reinen Zyklen zerlegt werden Die Halbgruppe* $Z(X)$ *ist* $\mathbb{Z}$*-graduiert durch den Grad.*

Proof. Wir nutzen aus, daß p eigentlich ist. $\square$

Auf der Halbgruppe $Z(X)$ führen wir nun die Relation "bordant" (wir schreiben $\sim$) ein.

Definition 3.12. *Es gilt $[A_0, p_0] \sim [A_1, p_1]$, wenn es ein Bordismusdatum $(B, (f, q))$ über X bezüglich einer zusammenhängenden Menge $U \subset \mathbb{R}$ und reguläre Werte $t_0, t_1 \in U$ gibt, so daß $[A_0, p_0] = [\partial_{t_0}(B, (f, q))]$ und $[A_1, p_1] = [\partial_{t_1}(B, (f, q))]$ gilt.*

Satz 3.13. *Die Relation "bordant" ist eine Äquivalenzrelation.*

Proof. Die Relation ist reflexiv. Sei $[A, p] \in Z(X)$. Wir wählen $B := \mathbb{R} \times A$ und $(f, q) = (\mathtt{pr}_1, p \circ \mathtt{pr}_2)$, $U := \mathbb{R}$ und $t_0 = t_1 = 0$.

Die Relation ist symmetrisch. In der Tat sei $[A_0, p_0] \sim [A_1, p_1]$ vermöge $(B, (f, q))$ und $t_0, t_1 \in U$ wie in der Definition. Durch Vertauschen der Rollen von t_0 und t_1 erhalten wir $[A_1, p_1] \sim [A_0, p_0]$.

Für den Nachweis der Transitivität müssen wir Bordismendaten verkleben. Dazu benutzen wir die Existenz von Kragen. Sei $[A_0, p_0] \sim [A_1, p_1]$ vermöge $(B_0, (f_0, q_0))$ und $t_0, t_1 \in U_0$ und $[A_1, p_1] \sim [A_2, p_2]$ vermöge $(B_1, (f_1, q_1))$ und $t_1, t_2 \in U_1$ (man kann durch Verschieben erreichen, daß t_1 in beiden Relationen auftaucht). Wir nehmen an, daß $(B_0, (f_0, q_0))$ und $(B_1, (f_1, q_1))$ bei t_1 einen Kragen haben. Weiter können wir annehmen, daß $t_0 < t_1 < t_2$ gilt.

Dann haben wir die folgenden cartesischen Diagramme

$$\begin{array}{ccccc} i_{t_1}^* B_i & \stackrel{c_i}{\leftarrow} & j_i^* B & \stackrel{J_i}{\rightarrow} & B_i \\ i_{t_1}^* q_i \downarrow & & j^* q_i \downarrow & & q_1 \downarrow \\ X & \stackrel{\mathtt{pr}_2}{\leftarrow} & V & \stackrel{j}{\rightarrow} & \mathbb{R} \times X \end{array} .$$

Wir definieren

$$\begin{aligned} B_0^* &:= (f_0, q_0)^{-1}((-\infty, t_1] \times X \cup V) \\ B_1^* &:= (f_1, q_1)^{-1}([t_1, \infty) \times X \cup V) . \end{aligned}$$

und $B := B_0^* \sqcup B_1^* / \sim$, wobei die Relation $\sim$ den Punkt $b_0 \in j^* B_0$ mit $(\mathtt{pr}_2^* F)(b_0) \in j^* B_1$ in Verbindung setzt, und wobei

$$F : i_{t_1} B_0^* \stackrel{\sim}{\rightarrow} A_1 \stackrel{\sim}{\rightarrow} i_{t_1}^* B_1$$

ist. Die Abbildungen q_i induzieren $q : B \to X$. Die Functionen f_i induzieren eine Funktion $f : B \to \mathbb{R}$. Wir erhalten somit ein Bordismusdatum $(B, (f, q))$ über $\mathbb{R}$ bezüglich $U_0 \cup U_1$. Die Werte t_0, t_2 sind regulär und liefern $[A_0, p_0] \sim [A_2, p_2]$. □

Lemma 3.14. *Die Äquivalenzrelation ist mit der graduierten Halbgruppenstruktur von $Z(X)$ veträglich.*

Proof. Offensichtlich. □

Definition 3.15. *Wir definieren* $\mathbf{MO}(X) := Z(X)/\sim$.

Die Menge $\mathbf{MO}(X)$ der Klassen $\{A, p\}$ hat die Struktur einer graduierten Halbgruppe.

Lemma 3.16. $\mathbf{MO}(X)$ *ist eine graduierte abelsche Gruppe.*

Proof. Sei $\{A, p\} \in \mathbf{MO}(X)$. Wir zeigen, daß $\{A, p\} + \{A, p\} = 0$. Dazu betrachten wir $B = \mathbb{R} \times A$ und setzen $f : B \to \mathbb{R}$, $f(x, a) = x^2$ und $q : B \to X$, $q := p \circ \mathtt{pr}_2$. Dann ist $(B, (f, q))$ ein Bordismusdatum über X bezüglich $\mathbb{R}$ mit dem regulären Wert 1. Es gilt offensichtlich $[\partial_1(B, (f, q))] = [A, p] + [A, p]$. □

Wir erweitern nun die Zuordnung $X \mapsto \mathbf{MO}(X)$ zu einem kontravarianten Funktor auf der Kategorie der glatten Mannigfaltigkeiten mit Werten in der Kategorie der graduierten abelschen Gruppen.

Sei $f : Y \to X$ eine glatte Abbildung und $c \in \mathbf{MO}(X)$.

Lemma 3.17. *Es gibt einen Repräsentanten (A, p) von c derart, daß p und f transversal sind.*

Proof. Sei $c = \{A, p_0\}$. Es gibt eine eigentliche Abbildung $p_1 : A \to X$, welche zu f transversal und zu p_0 glatt eigentlich glatt homotop ist (siehe Aufgabe 2.3).

Wir zeigen, daß $c = \{A, \tilde{p}_1\}$. Sei $F : U \times A \to X$ die glatte Homotopie derart, daß $p_i = F \circ i_{t_i}$. Dann sind $(U \times A, (\mathtt{pr}_1, F))$ ein Bordismusdatum über X bezüglich U

und t_0, t_1 reguläre Werte, welche $[A, p_0] \sim [A, p_1]$ liefern. $\square$

Der Beweis dieses Lemmas zeigt:

Folgerung 3.18. *$\{A, p\}$ hängt nur von der glatten Homotopieklasse von p ab.*

Definition 3.19. *Wir definieren $f^* := \mathbf{MO}(f) : \mathbf{MO}(X) \to \mathbf{MO}(Y)$ durch $f^*c = \{f^*A, f^*p\}$ für einen Repräsentanten (A, p) von c, für welchen p zu f transversal ist.*

Lemma 3.20. *$f^* : \mathbf{MO}(X) \to \mathbf{MO}(Y)$ ist ein wohldefinierter Homomorphismus graduierter Gruppen.*

Proof. Wir zeigen, daß $\mathbf{MO}(f)$ wohldefiniert ist. Seiein (A_i, p_i), $i = 0, 1$ Repräsentanten von $c \in \mathbf{MO}(X)$. Sei $(B, (h, q))$ ein Bordismusdatum über X bezüglich $U \subset \mathbb{R}$ mit regulären Werten t_i, vermöge welcher $[A_0, p_0] \sim [A_1, p_1]$.

Dann ist (h, q) zu $\mathtt{id}_U \times f$ transversal in $\{t_0, t_1\}\times$. Wir können (h, q) über $h^{-1}(U \setminus \{t_0, t_1\})$ derart modifizieren, daß (h, q) zu $\mathtt{id}_U \times f$ transversal ist.

Wir betrachten nun das cartesische Diagramm

$$\begin{array}{ccc} B' & \to & B \\ (h', q') \downarrow & & (h, q) \downarrow \\ U \times Y & \stackrel{\mathtt{id}_U \times f}{\to} & U \times X \end{array} .$$

Dann ist $(B', (h', q'))$ ein Bordismusdatum über Y bezüglich U mit regulären Werten, vermöge welcher $[f^*A_0, f^*p_0] \sim [f^*A_1, f^*p_1]$.

Die Verträglichkeit von f^* mit der Gruppenoperation ist leicht einzusehen. $\square$

Lemma 3.21. *Die Zuordnung $X \mapsto \mathbf{MO}(X)$, $f \mapsto \mathbf{MO}(f)$ ist ein Funktor.*

Proof. Übungsaufgabe. $\square$

Lemma 3.22. **MO** *ist homotopieinvariant.*

Proof. Seien $f_i : Y \to X$ glatte Abbildungen und $F : U \times Y \to X$ eine Homotopie derart, daß $f_i = F \circ i_{t_i}$ gilt. Sei weiter $c = \{A, p\} \in MO(X)$ gegeben. Unter Verwendung 3.18 und 2.2 können wir nach einer glatt-homotopen Modifikaton von p annehmen, daß p zu f_i und F transversal ist.

Dann ist aber $(F^*A, (\mathtt{pr}_1 \circ F^*p, \mathtt{pr}_2 \circ F^*p))$ ein Bordismusdatum, welches $f_0^*[A,p] \sim f_1^*[A,q]$ realisiert. □

3.3 Die Ringstruktur von $\mathbf{MO}(X)$

Wir betrachten glatte Mannigfaltigkeiten X und Y. Seien $c = \{A, p\} \in \mathbf{MO}(X)$ und $d \in \{B, q\} \in \mathbf{MO}(Y)$. Das Produkt von Präzyklen definiert ein äußeres Produkt.

Definition 3.23. *Wir definieren das äußere Produkt*

$$c \times d := \{A \times B, p \times q\} \in \mathbf{MO}(X \times Y) \ .$$

Lemma 3.24. *Das äußere Produkt ist wohldefiniert, graduiert, distributiv und assoziativ. Weiterhin ist es natürlich unter der Zurückziehung.*

Proof. Wir zeigen hier nur die Wohldefiniertheit und die Natürlichkeit, und wir überlassen die restlichen Teile dem Leser. Sei $\{A', p'\}$ ein weiterer Repräsentant von c und $\{C, (f, r)\}$ ein entsprechendes Bordismusdatum. Dann ist $(C, (f, r)) \times (B, q)$ ein Bordismusdatum, welches die Äquivalenz $(A, p) \times (B, q) \sim (A', p') \times (B, q)$ realisiert.

Sei $f : X' \to X$ eine glatte Abbildung. Dann gilt offensichtlich $f^*(A, p) \times (B, q) \cong (f \times \mathtt{id}_B)^*((A, p) \times (B, q))$. □

Sei $\Delta_X : X \to X \times X$ die diagonale Einbettung.

Definition 3.25. *Wir definieren das cup-Product* $\mathbf{MO}(X) \otimes \mathbf{MO}(X) \to \mathbf{MO}(X)$ *durch* $c \cup d := \Delta_X^*(c \times d)$.

Lemma 3.26. *Das* $\cup$*-Produkt definiert auf* $\mathbf{MO}(X)$ *eine graduiert kommutative Ringstruktur, welche natürlich unter der Zurückziehung ist.*

Proof. Die Assoziativität folgt aus

$$\begin{aligned}(c \cup d) \cup e &= \Delta_X^*(\Delta_X^*(c \times d) \times e) \\ &= (\Delta_X \circ (\Delta_X \times \mathtt{id}_X))^*(c \times d \times e) \\ &= (\Delta_X \circ (\mathtt{id}_X \times \Delta_X))^*(c \times d \times e) \\ &= \Delta_X^*(c \times \Delta_X^*(d \times e)) \\ &= c \cup (d \cup e)\ .\end{aligned}$$

Die weiteren Ringeigenschaften und Natürlichkeit ergeben sich aus den entsprechenden Eigenschaften des äußeren Produktes.

Sei $c = \{A, p\}$ und $d = \{B, q\}$. Wir nehmen an, daß $p \times q$ zu Δ_X transversal ist (Dies ist äquivalent dazu, daß p und q zueinander transversal sind.). Dann ist $c \cup d = \{A \times_X B, (p, q)\}$ und $d \cup c = \{B \times_X A, (q, p)\}$, und diese Zyklen sind offensichtlich isomorph. Wir haben also gezeigt, daß das Produkt graduiert kommutativ ist (was hier mit Kommutativität gleichbedeutend ist, da alle Element 2-Torsion sind.). □

3.4 Integration

Sei $f : X \to Y$ eine eigentliche Abbildung. Das Integral von Zyklen induziert $f_! : \mathbf{MO}(X) \to \mathbf{MO}(Y)$.

Definition 3.27. *Wir definieren* $f_!(\{A, p\}) = \{A, f \circ p\}$.

Lemma 3.28. $f_! : \mathbf{MO}(X) \to \mathbf{MO}(Y)$ *ist wohldefiniert, additiv und vom Grad* $\dim(Y) - \dim(X)$ *für reine Mannigfaltigkeiten* X, Y*. Ist* $g : Y \to Z$ *eine weitere eigentliche Abbildung, so gilt* $(g \circ f)_! = g_! \circ f_!$.

Proof. Wir zeigen nur die Wohldefiniertheit und überlassen die restlichen Argumente dem Leser.

Seien $[A, p] \sim [B, q]$ durch ein Bordismusdatum $(C, (h, r))$ bezüglich $U \subset \mathbb{R}$. Dann ist $(f \times \mathtt{id}_U) \circ (C, (h, r))$ ein Bordismusdatum bezüglich U welches $[A, f \circ p] \sim [B, f \circ q]$ realisiert. □

Sei

$$\begin{array}{ccc} Z \times_Y X & \overset{f^*g}{\to} & X \\ g^*f \downarrow & & f \downarrow \\ Z & \overset{g}{\to} & Y \end{array}$$

ein cartesisches Diagramm mit eigentlichem f.

Lemma 3.29. *Es gilt* $(g^*f)_! \circ (f^*g)^* = g^* \circ f_!$.

Proof. Sei $\{A, p\} \in \mathbf{MO}(X)$ derart, daß p transversal zu f^*g ist. In diesem Fall gilt die Identität auf dem Niveau von Isomorphieklassen von Zyklen. Dann ist auch $f \circ p$ zu g transversal und es gilt $(g^*f)_! \circ (f^*g)^*\{A, p\} = (A \times_X (Z \times_Y X), ((g^*f) \circ (f^*g)^*p))$. Dieser Zyklus ist aber zu $(A \times_Y Z, g^*(f \circ p))$ isomorph, und letzterer repräsentiert $g^* \circ f_!\{A, p\}$. □

Sei $d \in \mathbf{MO}(X)$ und $c \in \mathbf{MO}(Y)$.

Lemma 3.30. *Es gilt die Projektionsformel:*

$$f_!(c \cup d) = c \cup f_!(d) \ .$$

Proof. Diese Identität gilt auf dem Niveau von Isomorphieklassen von Zyklen. □

3.5 Reduzierte Kohomologietheorie

Wir betrachten die Kategorie der punktierten Räume $\mathbf{PT}^{fin}$ der punktierten topologischen Räume welche zu endlichen CW-Komplexen homotopieäquivalent sind. Mit $\Sigma : \mathbf{PT}^{fin} \to \mathbf{PT}^{fin}$ bezeichnen wir die natürliche Transformation, welche durch die Suspension induziert wird. Ist $f : A \to X$ eine punktierte Abbildung, so ist $C(f) = X \cup_f C(A)$ der Abbildungskegel von f. Sei $i : X \to C(f)$ die natürliche Einbettung.

Definition 3.31. *Eine reduzierte verallgemeinerte Kohomologietheorie ist ein Paar* (h, σ) *aus einem homotopieinvarianten Funktor* h *von* $\mathbf{PT}^{fin}$ *in die Kategorie der* $\mathbb{Z}$-*graduierten abelschen Gruppen und einer natürlichen Transformation* $\sigma : h \circ \Sigma \to h$

vom Grad -1. Dabei soll für jede Kofaserung $f : A \to X$ die Sequenz

$$h(C(f)) \stackrel{i^*}{\to} h(X) \stackrel{f^*}{\to} h(A)$$

exakt sein.

Wir erweitern nun den auf glatten Mannigfaltigkeiten definierten Funktor **MO** zu einer reduzierten Kohomologietheorie. Dazu benutzen wir folgende Fakten, welche wir hier nicht beweisen.

1. Jeder endliche punktierte CW-Komplex ist zu einer punktierten Mannigfaltigkeit homotopieäquivalent.
2. Sind X, Y Mannigfaltigkeiten, dann ist die Menge der Homotopieklassen von punktierten Abbildungen $[X, Y]$ isomorph zur Menge der glatten Homotopieklassen glatter punktierte Abbildungen.

Sei nun X ein Objekt in $\mathbf{PT}^{fin}$. Dann sei C^∞_X die Kategorie der Paare (M, h), wobei M eine glatte punktierte Mannigfaltigkeit und $h : M \to X$ eine Homotopieäquivalenz ist.

Definition 3.32. *Wir definieren*

$$\mathbf{MO}(X) := \lim_{\overleftarrow{C^\infty_X}} \mathbf{MO}(M) \ .$$

Beachte, daß die Auswertung $ev_{(M,h)} : \mathbf{MO}(X) \to \mathbf{MO}(M)$ ein Isomorphismus ist.

Ist $f : Y \to X$ eine punktierte Abbildung, dann definieren wir $f^* : \mathbf{MO}(X) \to \mathbf{MO}(Y)$ wie folgt. Sei $(N, j) \in C^\infty_Y$ und $(M, h) \in C^\infty_X$. Dann gibt es eine bis auf Homotopie eindeutige Homotopiefaktorisierung $F : N \to M$,

$$\begin{array}{ccc} N & \stackrel{F}{\to} & M \\ j \downarrow & & h \downarrow \\ Y & \stackrel{f}{\to} & X \end{array} \ .$$

Wir defineren nun f^* derart, daß

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{MO}(X) & \stackrel{\mathtt{ev}_{(M,h)}}{\to} & \mathbf{MO}(M) \\ f^* \downarrow & & F^* \downarrow \\ \mathbf{MO}(Y) & \stackrel{\mathtt{ev}_{(N,j)}}{\to} & \mathbf{MO}(N) \end{array}$$

kommutiert.

Sei $i_X : * \to X$ die Einbettung des Basispunktes.

Definition 3.33. *Wir definieren* $\mathbf{MO}_{red}(X)$ *als den Kern von* $i_X^* : \mathbf{MO}(X) \to \mathbf{MO}(*)$.

Damit haben wir einen homotopieinvarianten kontravarianten Funktor $\mathbf{MO}_{red}$ von $\mathbf{PT}^{fin}$ in die graduierten abelschen Gruppen definiert.

Um die Suspensionstransformation definieren zu können, brauchen wir ein glattes Modell $\Sigma^\infty M \xrightarrow{\sim} \Sigma M$ der Suspension einer punktierten glatten Mannigfaltigkeit M. Sei weiter $i_M^\infty : M \to \Sigma^\infty M$ eine glatte Approximation der Einbettung $i_M : M \to \Sigma M$ und $q_M^\infty : S^1 \times M \to \Sigma_{model} M$ der kanonischen Abbildung $q_M : S^1 \times M \to \Sigma M$. Alle diese Daten sind eindeutig bis auf Homotopie.

Wir definieren nun die Suspensionstransformation

$$\sigma_M : \mathbf{MO}_{red} \circ \Sigma^\infty(M) \to \mathbf{MO}_{red}(M) \ .$$

Dazu betrachten wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} S^1 \times M & \overset{q_M^\infty}{\to} & \Sigma^\infty M \\ \mathtt{pr}_2 \downarrow & & \\ M & & \end{array} .$$

Wir definieren für eine glatte Mannigfaltigkeit

$$\sigma_M^\infty : \mathbf{MO}_{red}(\Sigma^\infty(M)) \overset{(\mathtt{pr}_2)_! \circ (q_M^\infty)^*}{\to} \mathbf{MO}_{red}(M) \ .$$

Sei nun $X \in \mathbf{PT}^{fin}$. Wir wählen $h : M \to X$ in C_X^∞. Dann haben wir eine bis auf homotopie eindeutige Homotopieäquivalenz $\Sigma^\infty h : \Sigma^\infty M \to \Sigma X$ welche $\Sigma h : \Sigma M \to \Sigma X$ approximiert.

Definition 3.34. *Wir definieren* $\sigma_X : \mathbf{MO} \circ \Sigma(X) \to \mathbf{MO}(X)$ *derart, daß*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{MO} \circ \Sigma^\infty(M) & \overset{\sigma_M^\infty}{\to} & \mathbf{MO}(M) \\ \Sigma^\infty h \downarrow & & h \downarrow \\ \mathbf{MO} \circ \Sigma(X) & \overset{\sigma_X}{\to} & \mathbf{MO}(X) \end{array}$$

kommutiert.

Lemma 3.35. *Die Transformation $\sigma : \mathbf{MO}_{red} \circ \Sigma \to \mathbf{MO}_{red}$ ist natürlich.*

Proof. Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung punktierter Räume. Wir wählen glatte Approximationen $h : M \to X$ und $k : N \to Y$ sowie einen Homotopielifte $f^\infty : M \to N$. Wir wählen weiter eine glatte Approximation $\Sigma^\infty f^\infty : \Sigma^\infty M \to \Sigma^\infty N$ von Σf^∞.

Dann haben wir ein Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} M & \stackrel{\mathtt{pr}_2}{\leftarrow} & S^1 \times N & \stackrel{q_M^\infty}{\to} & \Sigma^\infty(M) \\ f^\infty \downarrow & & \mathtt{id}_{S^1} \times f^\infty \downarrow & & \Sigma^\infty f^\infty \downarrow \\ N & \stackrel{\mathtt{pr}_2}{\leftarrow} & S^1 \times N & \stackrel{q_N^\infty}{\to} & \Sigma^\infty(N) \end{array} .$$

Das linke Quadrat kommutiert exakt und das rechte bis auf Homotopie. Die Gleichung

$$(f^\infty)^* \circ \sigma_N^\infty = \sigma_M^\infty \circ (\Sigma^\infty f^\infty)^*$$

ist nun eine Konsequenz aus

$$(f^\infty)^* \circ (\mathtt{pr}_2)_! \circ (q_N^\infty)^* = (\mathtt{pr}_2)_! \circ (\mathtt{id}_{S^1} \times f^\infty)^* \circ (q_N^\infty)^* = (\mathtt{pr}_2)_! \circ (q_M^\infty)^* \circ (\Sigma^\infty f^\infty)^* .$$

Aus der Definition von der Suspensionstransformation erhalten wir damit

$$f^* \circ \sigma_Y = \sigma_X \circ (\Sigma f)^*$$

□

Lemma 3.36. *σ_X ist ein Isomorphismus.*

Proof. Wir konstruieren zuerst einen Kandidaten für die inverse Abbildung. Sei $\tilde{X} = [-1,1] \times X / \{-1,1\} \times X$ die unreduzierte Suspension und $\tilde{\Sigma} X \to \Sigma X$ die kanonische Projektion. Wir benutzen das folgende glatte Modell. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge. Wir setzen

$$\tilde{\Sigma}^\infty M := M \times [-1,1] \cup \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R} \setminus [-1,1]) .$$

In diesem Fall ist $\tilde{\Sigma}^\infty M \to \Sigma M$ eine Homotopieäquivalenz. Wir haben eine Einbettung $i_M : M \to \tilde{\Sigma}^\infty M$, $i_M(m) := (m, 0)$. Wir definieren

$$(i_M)_! := \delta_M : \mathbf{MO}_{red}(M) \to \mathbf{MO}_{red} \circ \tilde{\Sigma}^\infty(M) .$$

Wir haben eine Homotopie-Faktorisierung

$$\begin{array}{ccc} S^1 \times M & \stackrel{\tilde{q}_M^\infty}{\to} & \tilde{\Sigma}^\infty M \\ \| & & \downarrow \\ S^1 \times M & \stackrel{q_M^\infty}{\to} & \Sigma^\infty M \end{array} .$$

Sei $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Wir wählen ein Modell für $\tilde{q}_M^\infty : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times M \to \tilde{\Sigma}^\infty M$ derart, daß $(-1/8, 1/8) \times M \to \tilde{\Sigma}^\infty M$ die natürliche Einbettung $(t, m) \to (m, t)$ ist und $(3/8, 5/8) \times M \to \tilde{\Sigma}^\infty M$ durch $(t, m) \mapsto (*, 1/2 - t)$ gegeben wird. Wenn $t \notin \mathbb{Z} + ((-1/8, 1/8) \cup (3/8, 5/8))$, so soll die letzte Koordinate von $\tilde{q}_M(t, m)$ betragsmäßig größer als $1/8$ sein.

Wir müssen zeigen, daß

$$(\mathtt{pr}_2)_! \circ (\tilde{q}_M^\infty)^* \circ (i_M)_! = \mathtt{id}_{\mathbf{MO}_{red}(M)}$$

und

$$(i_M)_! \circ (\mathtt{pr}_2)_! \circ (\tilde{q}_M^\infty)^* = \mathtt{id}_{\mathbf{MO}_{red}(\tilde{\Sigma}^\infty M)}$$

gilt.

Um die erste Gleichung einzusehen, geht man wie folgt vor. Sei $\{A, p\} \in \mathbf{MO}_{red}(M)$. Da die Einschränkung dieser Klasse auf den Basispunkt verschwindet, kann man einen bordanten Zyklus finden, welcher den Basispunkt nicht trifft. In diesem Fall ist $(\mathtt{pr}_2)_! \circ (\tilde{q}_M^\infty)^* \circ (i_M)_!(\{A, p\}) = \{A, p\}$ richtig auf dem Niveau von Zyklen.

Für die zweite Gleichung betrachtet man einen Klasse $\{B, q\} \in \mathbf{MO}_{red}(\tilde{\Sigma}^\infty M)$. Da diese Klasse auf dem Basispunkt verschwindet, findet man einen bordanten Zyklus, für welchen q über i_M faktorisert. Dann gilt

$$(i_M)_! \circ (\mathtt{pr}_2)_! \circ (\tilde{q}_M^\infty)^*(\{B, q\} = \{B, q\}$$

ebenfalls auf dem Niveau von Zyklen. □

Wir betrachten nun die Exaktheit der Kofasersequenz. Es genügt, eine offene Mannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ mit einer offenen Teilmenge $f : A \subset M$ zu betrachten. Wir benutzen ein glattes Modell $C^\infty(f) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ für den Abbildungskegel $C(f)$. Wir setzen

$$C^\infty(f) := M \times (-1, 1/2) \cup A \times [1/2, 1] \cup \mathbb{R}^n \times (1, \infty) ,$$

mit dem Basispunkt $(0,\dots,0)\times 2$ und der Einbettung $i_M : M \to C^\infty(f)$, $i_M(m) := (m,0)$.

Lemma 3.37. *Die Sequenz*

$$\mathbf{MO}_{red}(C^\infty(f)) \to \mathbf{MO}_{red}(M) \to \mathbf{MO}_{red}(A)$$

ist exakt.

Proof. Sei $\{W,p\} \in \mathbf{MO}_{red}(M)$ derart, daß $\{W,p\}_{|A} = 0$.

Sei $(B,(f,q))$ ein Bordismusdatum bezüglich $(0,\infty) \subset \mathbb{R}$ mit einem regulären Wert $1/2$ derart, daß $[\partial_{1/2}(B,(f,q))] = [W,p]_{|A}$ und $f^{-1}(2,\infty) = \emptyset$ gilt. Wir nehmen weiter ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, daß $(B,(f,q))$ einen Kragen besitzt. Wir setzen $B_+ = f^{-1}[1/2,\infty)$. Sei $B_- := W \times (-1,1/2]$ und $B_- \to C^\infty(f)$ durch $(h,\mathtt{pr}_2)$ gegeben. Dann können wir B_+ mit B_- zu einem Zyklus (N,r) über $C^\infty(f)$ vekleben, so daß $[N,r]_{|M} = [W,p]$ gilt. □

Wir haben damit **MO** zu einer reduzierten verallgemeinerten Kohomologietheorie erweitert. Es ist klar, daß sich auch die multiplikative Struktur überträgt.

3.6 Pontrjagin-Thom Konstruktion

Für $k \le n$ sei $Gr_{k,n}$ der Raum aller k-kodimensionalen Unterräume in $\mathbb{R}^n$. Mit $E_{k,n} \to Gr_{k,n}$ bezeichnen wir das universelle Bündel mit dem Thomraum $Th(E_{k,n})$. Sei $\theta_{k,n} : Gr_{k,n} \to E_{k,n}$ der Nullschnitt und $\Theta_{k,n} \in \mathbf{MO}(Th(E_{k,n}))$ die dazugehörige Bordismusklasse.

Wir haben natürliche Einbettungen[4] $i_{k,n} : Gr_{k,n} \to Gr_{k+1,n+1}$ und $I_{k,n} : E_{k,n} \to E_{k+1,n+1}$ derart, daß $Th(I_{s,0})^*\Theta_{k+1,n+1} = \Theta_{k,n}$. Wir definieren den Raum

$$\mathbf{MO}^n := \lim_{\stackrel{l}{\to}} Th(E_{l,n+l}) \ .$$

Für $k < n$ haben wir natürliche Einbettungen $j_{k,n} : E_{k,n} \to E_{k,n+1}$[5].

[4]durch $(x_1,\dots,x_k,0_{k+1},\dots,0_n) \mapsto (x_1,\dots,x_k,0_{k+1},\dots,0_{n+1})$ induziert
[5]durch $j : (x_1,\dots) \mapsto (0,x_1,\dots,)$ und $G_{k,n} \ni V \mapsto \mathbb{R}e_1 \oplus j(V)$ induziert

Wir haben weiter eine natürliche Aufspaltung $j_{k,n}^* E_{k,n+1} \cong E_{k,n} \oplus \mathbb{R}$. Dies liefert eine Abbildung $\sigma^{k,n} : \Sigma Th(E_{k,n}) \to Th(E_{k,n+1})$. Dabei kommutiert das folgende Diagram:

$$\begin{array}{ccc} \Sigma Th(E_{k,n}) & \stackrel{\sigma^{k,n}}{\to} & Th(E_{k,n+1}) \\ \Sigma(Th(I_{k,n})) \downarrow & & I_{k+1,n+1} \downarrow \\ \Sigma Th(E_{k+1,n+1}) & \stackrel{\sigma^{k+1,n+1}}{\to} & Th(E_{k+1,n+2}) \end{array} .$$

Schließlich erhalten wir die Strukturabbildungen

$$\sigma^n : \Sigma \mathbf{MO}^n \to \mathbf{MO}^{n+1}$$

des Spektrums $\underline{\mathbf{MO}} = (\mathbf{MO}^n, \sigma^n)$.

Satz 3.38. *Das Spektrum* $\underline{\mathbf{MO}}$ *stellt die Kohomologietheorie* $\mathbf{MO}_{red}$ *dar.*

Proof. Sei $\tilde{\mathbf{MO}}_{red}$ die durch $\underline{\mathbf{MO}}$ dargestellte Kohomologietheorie. Wir geben eine natürliche Transformation $\phi_X : \tilde{\mathbf{MO}}_{red}(X) \to \mathbf{MO}_{red}(X)$ an. Sei

$$x \in \tilde{\mathbf{MO}}^l_{red}(X) = \lim_{\stackrel{\to}{n}} [\Sigma^n X, \mathbf{MO}^{n+l}] = \lim_{\stackrel{\to}{n,k}} [\Sigma^n X, Th(E_{k,n+k+l})]$$

durch $f : \Sigma^n X \to Th(E_{k,n+k+l})$ dargestellt. Dann definieren wir

$$\phi_X(x) := \sigma^n \circ f^* \Theta_{k,n+k+l} ,$$

wobei $\sigma^n : \mathbf{MO}^{n+l}_{red}(\Sigma^n X) \to \mathbf{MO}^l_{red}(X)$ die n-fache Anwendung des Suspensionsisomorphismus ist. Diese Definition ist unabhängig von der Wahl von k.

Die Abbildung f induziert

$$\tilde{f} : \underbrace{S^1 \times \dots S^1}_{n\times} \times X \to Th(E_{k,n+k+l}) ,$$

wobei wir diese Abbildung als glatt über dem Komplement des Basispunktes des Thomraumes und transversal zum Nullschnitt von $E_{k,n+k+l}$ annehmen können. Wir haben dann ein Diagram

$$\begin{array}{ccc} W & \to & Gr_{k,n+k+l} \\ q \downarrow & & \downarrow \\ \underbrace{S^1 \times \dots S^1}_{n\times} \times X & \stackrel{\tilde{f}}{\to} & Th(E_{k,n+k+l}) \\ \mathtt{pr}_2 \downarrow & & \\ X & & \end{array} ,$$

wobei W eine glatte Mannigfaltigkeit ist. Die Komposition $\mathtt{pr}_2 \circ q : W \to X$ repräsentiert $\phi_X(x)$. Mit dieser Beschreibung sieht man leicht ein, daß dieser Zyklus bei Vergrößerung von n gleich bleibt.

Nach Definition ist ϕ verträglich mit dem Suspensionsisomorphismus und somit eine Transformation verallgemeinerter reduzierter Kohomologietheorien. Um zu zeigen, daß ϕ ein Isomorphismus ist, genügt es, den Fall $X = *$ zu betrachten.

Satz 3.39. *Die Abbildung $\phi_* : \tilde{\mathbf{MO}}^*(*) \to \mathbf{MO}^*(*)$ ist ein Isomorphismus.*

Proof. Wir skizzieren den Beweis, indem wir den Kandidaten für die inverse Abbildung konstruieren. Sei (A, p) ein Zyklus über $*$ vom Grad $-l$. Dann betrachten wir eine Einbettung $i : A \to \mathbb{R}^n$. Für $a \in A$ sei $\bar{f}(a) \in Gr_{l,n}$ das orthogonale Komplement von $di(T_a A)$. Dann kann i zu einer offenen Einbettung $I : N \to \mathbb{R}^n$ ausgedehnt werden, wobei $N := \bar{f}^* E_{l,n}$ ist. Sei $f : N \to E_{l,n}$ die induzierte Abbildung. Wir erhalten nun eine Ausdehnung $f : S^n \to Th(E_{l,n})$ von f, welche $S^n \setminus I(N)$ auf den Basispunkt schickt. Es gilt offensichtlich (auf Zyklenniveau)

$$\phi_*([f]) = \{A, p\} \ ,$$

wobei $[f] \in \tilde{\mathbf{MO}}^{-l}_{red}(*)$ die durch f dargestellte Klasse ist. Also ist ϕ_* surjektiv. Wir definieren $\psi(\{A, p\}) := [f]$ und müssen die Wohldefiniertheit zeigen.

Sei $(B, (h, q))$ ein Bordismusdatum bezüglich $(-1, \infty) \subset \mathbb{R}$ und regulärem Werten 0 derart, daß $h^{-1}([1, \infty) := \emptyset$. Sei $A = h^{-1}(0)$. Wir nehmen einen Kragen bei 0 an. Wir wählen eine Ausdehnung der Einbettung von A zu einer Einbettung $\tilde{i} : B \to \mathbb{R}^n$. Dann ist $(\tilde{i}, h) : B \to \mathbb{R}^{n+1}$ auch eine Einbettung. Wir erhalten $\tilde{\bar{f}} : B \to Gr_{l+1,n+1}$. Wir wählen weiter eine Ausdehnung der Einbettung $\tilde{I} : \tilde{\bar{f}}^* E_{l+1,n+1} =: \tilde{N} \to \mathbb{R}^{n+1}$. Wir können annehmen, daß $\tilde{I}(\tilde{N})$ im oberen Halbraum $\mathbb{R}^{n+1}_+$ von $\mathbb{R}^{n+1}$ enthalten ist.

Wir können nun die Einpunktkompaktifizierung von $\mathbb{R}^{n+1}_+$ mit D^{n+1} identifizieren. Die Ausdehnung von $\tilde{f} : \tilde{N} \to E_{l+1,n+1}$ zu $D^{n+1} \to Th(E_{l+1,n+1})$ ist eine Ausdehnung von $Th(I_{l,n}) \circ f : S^n \to Th(E_{l,n}) \to Th(E_{l+1,n+1})$. Dies zeigt, daß $[f] = 0$ in $\tilde{\mathbf{MO}}_{red}(*)$.

Damit haben wir gezeigt, daß $\psi : \mathbf{MO}_{red}(*) \to \tilde{\mathbf{MO}}_{red}(*)$ wohldefiniert ist.

Es verbleibt zu zeigen, daß $\psi \circ \phi_* = \mathtt{id}_{\tilde{\mathbf{MO}}_{red}(*)}$ gilt. Dies ist eine Übungsaufgabe für den Leser. $\square$

4 Normale Strukturen

4.1 Das stabile Normalenbündel

Sei $f : A \to B$ eine glatte Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten.

Definition 4.1. *Ein Repräsentant des stabilen Normalenbündels von f ist eine exakte Sequenz*

$$\mathcal{N} : 0 \to TA \stackrel{(df,\alpha)}{\to} f^*TB \oplus \underline{\mathbb{R}^k}_A \stackrel{u}{\to} N \to 0\ .$$

Das Bündel N bezeichnen wir als den Quotienten von $\mathcal{N}$.

Wir haben einen natürlichen Begriff der Isomorphie derartiger Repräsentanten.

Sei $l \in \mathbb{N}$.

Definition 4.2. *Die l-fache Stabilisierung eines Repräsentanten $\mathcal{N}$ ist durch*

$$\mathcal{N}(l) : 0 \to TA \stackrel{(df,\alpha,0)}{\to} f^*TB \oplus \underline{\mathbb{R}^k}_A \oplus \underline{\mathbb{R}^l}_A \stackrel{u \oplus \mathtt{id}_{\underline{\mathbb{R}^l}_A}}{\to} N \oplus \underline{\mathbb{R}^l}_A \to 0$$

gegeben.

Sei $q : C \to B$ eine weitere glatte Abbildung, welche zu f transversal ist. Wir betrachten das cartesische Diagramm

$$\begin{array}{ccc} C \times_B A & \stackrel{f^*q}{\to} & A \\ q^*f \downarrow & & f \downarrow \\ C & \stackrel{q}{\to} & B \end{array} .$$

In dieser Situation haben wir ein Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & (f^*q)^*TA & \stackrel{((f^*q)^*df,(f^*q)^*\alpha)}{\to} & (f^*q)^*f^*TB \oplus \underline{\mathbb{R}^k}_{C\times_B A} & \stackrel{(f^*q)^*u}{\to} & (f^*q)^*N & \to & 0 \\ & & df^*q \uparrow & & (f^*q)^*dq \oplus \mathtt{id}_{\underline{\mathbb{R}^k}_{C\times_B A}} \uparrow & & \gamma \uparrow & & \\ 0 & \to & T(C \times_B A) & \stackrel{(dq^*f,\beta)}{\to} & (q^*f)^*TC \oplus \underline{\mathbb{R}^k}_{C\times_B A} & \stackrel{v}{\to} & N' & \to & 0 \end{array} ,$$

wobei N' das Quotientenbündel, v die kanonische Projektion, $\beta := (f^*q)^*\alpha \circ df^*q$, und γ die induzierte Abbildung ist. Man sieht ein, daß γ ein Isomorphismus sein muß.

Definition 4.3. *Die Zurückziehung von $\mathcal{N}$ durch q wird durch*

$$q^*\mathcal{N} : 0 \to T(C \times_B A) \overset{(dq^*f,\beta)}{\to} (q^*f)^*TC \oplus \underline{\mathbb{R}^k}_{C\times_B A} \overset{\gamma\circ v}{\to} (f^*q)^*N \to 0$$

definiert.

Sei $l \in \mathbb{N}$.

Lemma 4.4. *Wir haben einen kanonischen Isomorphismus $q^*(\mathcal{N}(l)) \cong (q^*\mathcal{N})(l)$ welcher auf den Quotienten den offensichtlichen Isomorphismus $q^*(N \oplus \underline{\mathbb{R}^l}_A) \cong q^*N \oplus \underline{\mathbb{R}^l}_{C\times_B A}$ induziert.*

Proof. Ausschreiben der Repräsentanten. □

Sei nun $p : D \to C$ eine glatte Abbildung derart, daß eine (und damit alle) der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist.

1. $q \circ p$ ist transversal zu f
2. p ist transversal zu q^*f.

Lemma 4.5. *Wir haben einen kanonischen Isomorphismus $p^*q^*\mathcal{N} \cong (q\circ p)^*\mathcal{N}$ welcher den kanonischen Isomorphismus $p^*q^*N \cong (q \circ p)^*N$ der Quotienten induziert.*

Proof. Ausschreiben der Repräsentanten. □

Sei $g : B \to C$ eine glatte Abbildung und

$$\mathcal{M} : 0 \to TB \overset{(dg,\beta)}{\to} g^*TC \oplus \underline{\mathbb{R}^l}_B \overset{v}{\to} M \to 0\ .$$

ein Repräsentant des stabilen Normalenbündels. Wir wollen einen natürlichen Repräsentanten des stabilen Normalenbündles von $g \circ f$ konstruieren.

Dazu betrachten wir das folgende Diagramm.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & TA & \stackrel{(df,\alpha)}{\to} & f^*TB \oplus \underline{\mathbb{R}^k}_A & \stackrel{u}{\to} & N & \to & 0 \\
 & & \| & & (f^*dg, f^*\beta, \mathtt{id}_{\underline{\mathbb{R}^k}_A}) \downarrow & & s \downarrow & & \\
0 & \to & TA & \stackrel{(d(g\circ f), f^*\beta\circ df, \alpha)}{\to} & f^*g^*TC \oplus \underline{\mathbb{R}}^l_A \oplus \underline{\mathbb{R}}^k_A & \stackrel{r}{\to} & R & \to & 0 \\
 & & & & f^*v \circ \mathtt{pr}_{f^*g^*TC \oplus \underline{\mathbb{R}}^l_A} \downarrow & & t \downarrow & & \\
 & & & & f^*M & = & f^*M & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array} .$$

R ist der Quotient mit der kanonischen Projektion r, und s und t sind induziert.

Definition 4.6. *Wir definieren die Komposition der Repräsentanten $\mathcal{N}$ and $\mathcal{M}$ durch*

$$\mathcal{M} \circ \mathcal{N} : 0 \to TA \stackrel{(d(g\circ f), f^*\beta\circ df, \alpha)}{\to} f^*g^*TC \oplus \underline{\mathbb{R}}^l_A \oplus \underline{\mathbb{R}}^k_A \stackrel{r}{\to} R \to 0 .$$

Sei $j \in \mathbb{N}$.

Lemma 4.7. *Wir haben einen kanonischen Isomorphismus*

$$\mathcal{M}(j) \circ \mathcal{N} \cong \mathcal{M} \circ \mathcal{N}(j) \cong (\mathcal{M} \circ \mathcal{N})(j) .$$

Proof. Ausschreiben der Repräsentanten. □

Sei $q : D \to C$ eine glatte Abbildung, welche zu $g \circ f$ und g transversal ist. Dann ist g^*q transversal zu f.

Lemma 4.8. *Wir haben einen kanonischen Isomorphismus $q^*(\mathcal{M} \circ \mathcal{N}) \cong q^*\mathcal{M} \circ$*

$(g^*q)\mathcal{N}$, welcher auf den Quotienten

$$\begin{array}{ccc}
0 & & 0 \\
\downarrow & & \downarrow \\
((g\circ f)^*q)^*N & = & ((g\circ f)^*q)^*N \\
\downarrow & & \downarrow \\
((g\circ f)^*q)^*R & \cong & \tilde{R} \\
\downarrow & & \downarrow \\
((g\circ f)^*q)^*f^*M & \cong & ((q^*g)^*f)^*(q^*g)^*M \\
\downarrow & & \downarrow \\
0 & & 0
\end{array}$$

induziert, wobei $\tilde{R}$ den Quotienten von $q^*\mathcal{M}\circ(g^*q)\mathcal{N}$ bezeichnet.

Proof. Ausschreiben der Repräsentanten. □

Sei $h : C \to D$ eine glatte Abbildung und $\mathcal{H}$ ein Repräsentant des stabilen Normalenbündels von h mit dem Quotienten H. Mit Q_1 und Q_2 bezeichnen wir die Quotienten von $\mathcal{H}\circ(\mathcal{M}\circ\mathcal{N})$ und $(\mathcal{H}\circ\mathcal{M})\circ\mathcal{N}$. Seien weiter R und S die Quotienten von $\mathcal{M}\circ\mathcal{N}$ und $\mathcal{H}\circ\mathcal{M}$.

Lemma 4.9. *Wir haben einen natürlichen Isomoprhismus $\mathcal{H}\circ(\mathcal{M}\circ\mathcal{N}) \cong (\mathcal{H}\circ\mathcal{M})\circ\mathcal{N}$ welcher vermöge des Diagramms*

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
f^*M & \leftarrow & R & \leftarrow & N & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & Q_1 & \cong & Q_2 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & f^*g^*H & \leftarrow & f^*S & \leftarrow & f^*M \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
\end{array},$$

die Identität auf M induziert.

Proof. Ausschreiben der Repräsentanten. □

Sei $f : X \to Y$ eine glatte Abbildung und sei $\mathcal{N}_0$ ein Repräsentant des stabilen Normalenbündels von f. Sei weiterhin $F : \mathbb{R} \times X \to \mathbb{R} \times Y$ glatt derart, daß $(\mathtt{pr}_1 \circ F)(t, x) = t$ und $F(0, x) = f(x)$.

Lemma 4.10. *Es gibt einen Repräsentanten $\mathcal{N}$ des stabilen Normalenbündels von F derart daß $\mathcal{N}_{|\{0\}\times X} \cong \mathcal{N}_0(l)$ für ein geeignetes $l > 0$.*

Proof. Wir betrachten

$$0 \to \mathtt{pr}_1^* T\mathbb{R} \oplus \mathtt{pr}_2^* TX \stackrel{(dF,\alpha)}{\to} \mathtt{pr}_1^* T\mathbb{R} \oplus f^*\mathtt{pr}_2^* TY \oplus \underline{\mathbb{R}}^l_{\mathbb{R}\times X} \stackrel{v}{\to} \mathtt{pr}_2^* N \oplus \underline{\mathbb{R}}^l_{\mathbb{R}\times X} \to 0 \ .$$

Wir haben α_0 und v_0 über $\{0\} \times X$ vorgegeben. Wenn l genügend groß ist, dann kann man α_0 zu einem α ausdehnen, so daß der linke Pfeil injektiv bleibt. Wir sehen weiter ein, daß es eine Ausdehnung von v_0 zu v gibt. □

4.2 $\mathcal{G}$-Strukturen

Wir betrachten eine Familie von Lie-Gruppen $(G(n))_{n\geq 0}$ zusammen mit Homomorphismen

$$a_n : G(n) \to GL(n) \ .$$

Es seien weiterhin Homomorphismen $i_{n,m} : G(n)\times G(m) \to G(n+m)$ derart gegeben, daß

$$\begin{array}{ccc} G(n) \times G(m) & \stackrel{a_n\times a_m}{\to} & Gl(n) \times GL(m) \\ i_{n,m} \downarrow & & \downarrow \\ G(n+m) & \stackrel{a_{n+m}}{\to} & Gl(n+m) \end{array}$$

kommutiert. Hierbei ist die rechte vertikale Abbildung durch $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n+m}$ induziert. Die Abbildungen $i_{n,m}$ sollen weiterhin einer Assoziativitätsbedingung genügen:

$$i_{n,m+r} \circ (\mathtt{id} \times i_{m,r}) = i_{n+m,r} \circ (i_{n,m} \times \mathtt{id}) \ .$$

Die Gesamtheit dieser Daten bezeichnen wir mit $\mathcal{G}$.

Hier sind einige Beispiele.

1. $O(n)$

2. $SO(n)$

3. $\{1\}$

4. $Spin(n)$

5. $Spin^c(n)$

Sei $f : A \to B$ eine glatte Abbildung und

$$\mathcal{N} : 0 \to TA \stackrel{(df,\alpha)}{\to} f^*TB \oplus \underline{\mathbb{R}^k}_A \stackrel{u}{\to} N \to 0$$

ein Repräsentant des stabilen Normalenbündels. Sei $n = \dim(N)$.

Definition 4.11. *Eine $\mathcal{G}$-Struktur auf $\mathcal{N}$ ist ein Paar (P, Ψ) aus einem $G(n)$-Hauptfaserbündel $P \to A$ und einem Isomorphismus reeller Vektorbündel $\Psi : P \times_{G(n),a_n} \mathbb{R}^n \cong N$.*

Definition 4.12. *Ein Repräsentant einer normalen $\mathcal{G}$-Struktur von f ist ein Tripel $\mathbf{N} := (\mathcal{N}, P, \Psi)$, wobei (P, Ψ) eine $\mathcal{G}$-Struktur auf $\mathcal{N}$ ist.*

Wir haben einen offensichtlichen Begriff von Isomorphie für Repräsentanten normaler $\mathcal{G}$-Strukturen.

Wir betrachten nun Operationen mit Repräsentanten normaler $\mathcal{G}$-Strukturen. Sei $l \in \mathbb{N}$.

Definition 4.13. *Die l-fache Stabilisierung $\mathbf{N}(l)$ eines Repräsentanten $\mathbf{N} := (\mathcal{N}, P, \Psi)$ ist durch $(\mathcal{N}(l), P', \Psi')$ gegeben, wobei $\mathcal{N}(l)$ die l-fache Stabilisierung von $\mathcal{N}$ mit dem Quotienten $N(l) := N \oplus \underline{\mathbb{R}^l}_A$, $P' := P \times_{G(n),i_{n,l}} G(n+l)$, sowie*

$$\Psi' : P' \times_{G(n+l)} \mathbb{R}^n \cong (P \times_{G(n)} \mathbb{R}^n) \oplus \underline{\mathbb{R}^l}_A \stackrel{\Psi \oplus \mathtt{id}}{\to} N \oplus \underline{\mathbb{R}^l}_A = N(l) \ .$$

ist.

Sei $q : C \to B$ eine weitere glatte Abbildung, welche zu f transversal ist. Wir betrachten das cartesische Diagramm

$$\begin{array}{ccc} C \times_B A & \stackrel{f^*q}{\to} & A \\ q^*f \downarrow & & f \downarrow \\ C & \stackrel{q}{\to} & B \end{array} \ .$$

Der Quotient von $q^*\mathcal{N}$ ist $(f^*q)^*N$.

Definition 4.14. *Wir definieren* $q^*\mathbf{N} := (q^*\mathcal{N}, (f^*q)^*P, (f^*q)^*\Psi)$.

Sei $l \in \mathbb{N}$.

Lemma 4.15. *Wir haben einen kanonischen Isomorphismus* $q^*(\mathbf{N}(l)) \cong (q^*\mathbf{N})(l)$.

Proof. Ausschreiben der Repräsentanten. □

Sei nun $p : D \to C$ eine glatte Abbildung derart, daß eine (und damit alle) der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist.

1. $q \circ p$ ist transversal zu f
2. p ist transversal zu q^*f.

Lemma 4.16. *Wir haben einen kanonischen Isomorphismus* $p^*q^*\mathbf{N} \cong (q \circ p)^*\mathbf{N}$.

Proof. Ausschreiben der Repräsentanten. □

Sei $g : B \to C$ eine glatte Abbildung und

$$\mathcal{M} : 0 \to TB \stackrel{(dg,\beta)}{\to} g^*TC \oplus \underline{\mathbb{R}}^l{}_B \stackrel{v}{\to} M \to 0 \ .$$

ein Repräsentant des stabilen Normalenbündels. Sei weiter $\mathbf{M} = (\mathcal{M}, Q, \Phi)$ eine Erweiterung von $\mathcal{M}$ zu einem Repräsentanten einer normalen $\mathcal{G}$-Struktur. Wir haben einen Repräsentanten $\mathcal{M} \circ \mathcal{N}$ des stabilen Normalenbündels von $g \circ f$ mit dem Quotienten R, welcher in einer Sequenz

$$0 \to N \to R \to M \to 0$$

liegt. Ein Split $\sigma : M \to R$ induziert eine Zerlegung $R \cong_\sigma N \oplus f^*M$.

Definition 4.17. *Wir definieren den Repräsentanten einer normalen* $\mathcal{G}$*-Struktur von* $g \circ f$ *durch*

$$\mathbf{M} \circ_\sigma \mathbf{N} := (\mathcal{M} \circ \mathcal{N}, P', \Psi') \ ,$$

wobei

$$P' := (P \times f^*Q) \times_{G(n)\times G(m), i_{n,m}} G(n+m)$$

und

$$\Psi' : P' \times_{G(n+m)} \mathbb{R}^{n+m} \cong (P \times_{G(n)} \mathbb{R}^n) \oplus f^*(Q \times_{G(m)} \mathbb{R}^m) \overset{\Psi \oplus f^*\Phi}{\to} N \oplus f^*M \cong_\sigma R \ .$$

Die Isomorphieklasse des Repräsentanten $\mathbf{M} \circ_\sigma \mathbf{N}$ hängt von der Wahl von σ ab. Wir werden jedoch später ausnutzen, daß je zwei Wahlen von σ (kanonisch) homotop sind.

Sei $j \in \mathbb{N}$.

Lemma 4.18. *Wir haben einen kanonischen Isomorphismus*

$$\mathbf{M}(j) \circ_\sigma \mathbf{N} \cong \mathbf{M} \circ_\sigma \mathbf{N}(j) \cong_\sigma (\mathbf{M} \circ \mathbf{N})(j) \ .$$

Proof. Ausschreiben der Repräsentanten. □

Wir nehmen an, daß $q : D \to C$ transversal zu $g \circ f$ und g ist. Dann ist g^*q transversal zu f.

Lemma 4.19. *Wir haben einen kanonischen Isomorphism* $q^*(\mathbf{M} \circ_\sigma \mathbf{N}) \cong q^*\mathbf{M} \circ_{\sigma'} (g^*q)\mathbf{N}$*, wobei* σ' *durch* σ *induziert wird.*

Proof. Ausschreiben der Repräsentanten. □

Sei $h : C \to D$ eine glatte Abbildung und $\mathcal{H}$ ein Repräsentant des stabilen Normalenbündles. Sei τ ein Split für

$$0 \to M \to S \to H \to 0 \ .$$

Dann haben wir induzierte Splits μ und λ für

$$0 \to R \to Q_1 \to f^*g^*H \to 0$$

und

$$0 \to N \to Q_2 \to f^*S \to 0 \ .$$

Lemma 4.20. *Wir haben einen kanonischen Isomorphismus* $\mathbf{H} \circ_\mu (\mathbf{M} \circ_\sigma \mathbf{N}) \cong (\mathbf{H} \circ_\tau \mathbf{M}) \circ_\lambda \mathbf{N}$.

Proof. Ausschreiben der Repräsentanten. □

Sei $f : X \to Y$ eine glatte Abbildung und sei $\mathbf{N}_0$ ein Repräsentant einer normalen $\mathcal{G}$-Struktur von f. Sei weiterhin $F : \mathbb{R}\times X \to \mathbb{R}\times Y$ glatt derart, daß $(\mathtt{pr}_1 \circ F)(t,x) = t$ und $F(0,x) = f(x)$.

Lemma 4.21. *Es gibt einen Repräsentanten* $\mathbf{N}$ *einer normalen* $\mathcal{G}$*-Struktur von* F *derart, daß* $\mathbf{N}_{|\{0\}\times X} \cong \mathbf{N}_0(l)$ *für ein geeignetes* $l > 0$.

Proof. In Lemma 4.10 haben wir einen Repräsentanten $\mathcal{N}$ des stabilen Normalenbündels gefunden, dessen Quotient mit $\mathtt{pr}_2^* N(l)$ identifiziert ist. □

4.3 $\mathcal{G}$-Bordismus - $\mathbf{MG}(X)$

In diesem Abschnitt geben wir die Modifikationen an, welche die Kohomologietheorie **MO** verfeinert.

Ein Zyklus ist nunmehr ein Tupel $(A, p, \mathbf{N})$, wobei (A, p) ein Zyklus wie bisher und $\mathbf{N}$ ein Repräsentant einer normalen $\mathcal{G}$-Structur ist.

Die Definition des Produktes und der Zurückziehung von Zyklen benutzt die entsprechende Konstruktion für die Repräsentanten der normalen $\mathcal{G}$-Strukturen.

Der Begriff des Bordismusdatums überträgt sich entsprechend unter Einbeziehung der Repräsentanten der normalen $\mathcal{G}$-Strukturen.

In der Definition des Kragens verlangt man, daß die cartesischen Diagramme mit den Repräsentanten der normalen $\mathcal{G}$-Strukturen der vertikalen Abbildungen verträglich sind.

Man zeigt (Übungsaufgabe), daß sich der Existenzsatz für Kragenumgebungen verallgemeinert.

Wir definieren die Halbgruppe $Z_{\mathcal{G}}(X)$ von Isomorphieklassen von Zyklen analog zu $Z(X)$. Darauf führen wir die Relation "stabil normal bordant" ein, welche durch Bordismusdaten und Stabilisieren erzeugt wird. Wir weisen nach, daß diese eine

Äquivalenzrelation ist. Wir definieren $\mathbf{MG}(X)$ als Menge der Äquivalenzklassen bezüglich dieser Relation. Diese Relation erweist sich mit Produkten verträglich.

Lemma 4.22. $\mathbf{MG}(X)$ *ist eine abelsche Gruppe.*

Proof. Wir müssen die Existenz von inversen Elementen zeigen. Dazu betrachten wir das Bordismusdatum $b := (\mathbb{R}, x^2, \mathbf{N})$ über $\mathbb{R}$, wobei

$$\mathcal{N} : 0 \to T\mathbb{R} \stackrel{(2x,\alpha)}{\to} T\mathbb{R} \oplus \underline{\mathbb{R}}_{\mathbb{R}} \to N \to 0$$

und $\mathbf{N} = (\mathcal{N}, P, \Psi)$ eine normale $\mathcal{G}$-Struktur repräsentiert. So eine Struktur existiert, da $\mathbb{R}$ kontrahierbar ist. Wir können es weiter so einrichten, daß $\partial_{1/2}b$ isomorph zur einfachen Stabilisierung von $* := (*, \mathtt{id}, \dots)$ ist. Offensichtlich repräsentiert $-* := \partial_{-1/2}b$ ein Inverses von $*$.

Im Allgemeinen ist ein Inverses von c durch $c \times (-*)$ gegeben. □

Wir übertragen die Konstruktion der kontravarianten Funktorialität sinngemäß. Dabei brauchen Lemma 4.10, um ausgehend von Homotopien Bordismendaten zu konstruieren. Insbesondere ist die Zurückziehung wieder homotopieinvariant.

Die Produkte auf $\mathbf{MG}$ werden wie für $\mathbf{MO}$ definiert, wobei man die entsprechenden Produkte der Repräsentanten der normalen $\mathcal{G}$-Strukturen benutzt. Die graduierte Kommutativität des $\cup$-Produktes muß man wohl in dieser Allgemeinheit aufgeben.

Um die Integration über $f : X \to Y$ auf dem Zyklenniveau zu definieren, benutzt man eine splittende normale $\mathcal{G}$-Structur $\mathcal{M}$ von f. Man überprüft, daß auf dem Nievau von $\mathbf{MG}$ die Wahl des Splits keine Rolle spielt, da je zwei solche zueinander homotop sind. Die Funktorialität der Integration bezüglich der Komposition folgt. Ebenso weist man die Verträglichkeit mit Zurückziehen und Produkt nach.

Wir dehnen nun $\mathbf{MG}$ auf die Kategorie $\mathbf{PT}^{fin}$ aus.

5 Axioms of a smooth extension of a cohomology theory

5.1 Basic structures

5.1.1

We consider the following catgories.

1. $\mathcal{M}$ denotes the category of smooth manifolds and smooth maps.
2. $\mathcal{T}op$ denotes the category of topological spaces
3. $\mathcal{S}$ denotes the category of spectra

These categories are connected by the following functors.

1. $\mathcal{F} : \mathcal{M} \to \mathcal{T}op$ is the functor which forgets the smooth structure.
2. $\underline{\dots} : \mathcal{T}op \to \mathcal{S}$ is the functor which associates to a space it suspension spectrum so that $\underline{X}^n := \Sigma^n X_+$.
3. The functor $\underline{\dots}$ has a right-adjoint $\Omega^\infty : \mathcal{S} \to \mathcal{T}op$ given by $\Omega^\infty \underline{E} = \mathtt{colim}_n \Omega^n E^n$. We let $\Omega^{\infty-n} := \Omega^\infty \circ T^{-n}$, where $T : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ is the shift functor.

5.1.2

A ring spectrum $\underline{h}$ represents a multiplicative cohomology theory h^*. For $X \in \mathcal{T}op$ we then have the graded ring $h(X) := \mathtt{Hom}_{\mathcal{S}}(\underline{X}, \underline{h})$.

Let R be a $\mathbb{Z}$-graded commutative algebra over $\mathbb{R}$. Then we form the ring spectrum $\underline{H_R} := \vee_k \underline{K(R^k)}[k]$, where $\underline{K(R^k)}[k]$ is the Eilenberg-MacLane spectrum of the additive group R^k shifted by k. This spectrum classifies the multiplicative cohomology theory $H_R = H_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} R$ (which may be different from the cohomology $H^*(\dots, R)$ with coefficients in R is R is infinite-dimensional).

5.1.3

Assume that we are given a ring spectrum $\underline{h}$ together with map $\underline{r} \in \mathtt{Hom}_{\mathcal{S}}(\underline{h}, \underline{H_R})$ which respects the ring structure. It induces a natural transformation of ring-valued functors $r : h \to H_R$.

The pair $(\underline{h}, \underline{r})$ is the basic datum which we want to promote to a smooth extension.

5.1.4

The circle S^1 is naturally h^*-oriented. The product with S^1 induces a functor $S^1_\times : \mathcal{T}op \to \mathcal{T}op$. The integration over the fibres of $S^1 \times X \to X$ induces a natural transformation $s : Sh \to h[-1]$, where $Sh := h \circ S^1_\times$.

5.1.5

On smooth manifolds we have the following functors and natural transformations.

1. Let $\mathcal{A}$ be the contravariant functor on $\mathcal{M}$ with values in graded rings which associates to a manifold M the ring of smooth differential forms $\mathcal{A}(M)$. We set $\mathcal{A}_R := \mathcal{A} \otimes R$ (algebraic tensor product).
2. The de Rahm differential induces a natural transformation $d : \mathcal{A}_R \to \mathcal{A}_R$.
3. By $\mathcal{A}_{R,d=0}$ we denote the ring-valued functor which associates to M the space of closed forms $\{\omega \in \mathcal{A}_R(M) \mid d\omega = 0\}$.
4. By $\mathcal{A}_R/\mathtt{im}(d)$ we denote the graded group valued functor which associates to M the graded group $\mathcal{A}_R(M)/\mathtt{im}(d)$.
5. Let $H_{R,dR}$ be the functor on $\mathcal{M}$ with values in graded rings which associates to M the cohomology of the complex $(\mathcal{A}_R(M), d)$.
6. There is a natural transformation $[\dots] : \mathcal{A}_{R,d=0} \to H_{R,dR}$, which maps a closed form $\omega \in \mathcal{A}_{R,d=0}(M)$ to its de Rham cohomology class $[\omega] \in H_{R,dR}(M)$.
7. Integration over cycles yields a natural isomorphism $\int : H_{R,dR} \to H_R \circ \mathcal{F}$. Usually we will denote $\int \circ [\dots] =: \{\dots\}$.

8. There is a natural transformation $rep : H_R \circ \mathcal{F} \to \mathcal{A}_R/\mathtt{im}(d)$ which associates to a class $x \in H_R(\mathcal{F}(M))$ the unique class $\omega + \mathtt{im}(d) \in \mathcal{A}_R(M)/\mathtt{im}(d)$ such that $d\omega = 0$ and $\{\omega\} = x$.

5.1.6

First we introduce the objects which make up a basic smooth extension of $(\underline{h}, \underline{r})$. Such an extension is given by the following objects:

1. a graded ring valued functor $\hat{h}$ on $\mathcal{M}$,
2. a natural transformation $\hat{r} : \hat{h} \to \mathcal{A}_{R,d=0}$,
3. a natural transformation $v : \hat{h} \to h \circ \mathcal{F}$,
4. a natural transformation of graded group-valued functors $a : \mathcal{A}_R/\mathtt{im}(d)[-1] \to \hat{h}$.
5. A natural transformation of graded group valued functors $\hat{s} : S\hat{h} \to \hat{h}[-1]$.

5.1.7

These object are restricted by the following conditions.

1. $\{\dots\} \circ \hat{r} = r \circ v$
2. $\hat{r} \circ a = d$
3. For each $M \in \hat{M}$, $\omega \in \mathcal{A}_R/\mathtt{im}(d)(M)[-1]$ and $\hat{x} \in \hat{h}(M)$ we have
$$a(\omega)\hat{x} = a(\omega\hat{r}(\hat{x})) \ .$$
4. The following sequence of group-valued functors is exact:
$$\Gamma \circ \mathcal{F} \stackrel{rep}{\to} \mathcal{A}_R/\mathtt{im}(d)[-1] \stackrel{a}{\to} \hat{h} \stackrel{v}{\to} h \circ \mathcal{F} \to 0 \ ,$$
where $\Gamma := \mathtt{im}(r : h[-1] \to H_{\mathbb{R}}[-1])$.

5. Let $\mathbb{R}_\times : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ be the functor given by multiplcation by $\mathbb{R}$. We set $\mathbb{R}\hat{h} = \hat{h} \circ \mathbb{R}_\times$. The inclusion of a point induces transformations $f_a : \mathbb{R}\hat{h} \to \hat{h}$, $a \in \mathbb{R}$. We define a natural transformation $t : \mathbb{R}\hat{h} \to \mathcal{A}_R/\mathtt{im}(d)[-1]$ by
$$t(\hat{x}) = \int_{[0,1]\times M/M} \hat{r}(\hat{x}) + \mathtt{im}(d) \ .$$
Then we require that
$$f_1 - f_0 = a \circ t \ .$$
6. $v \circ \hat{s} = s$.
7. There is a natural transformation $Int : S\mathcal{A}_R \to \mathcal{A}_R[-1]$ given by
$$Int(\omega) = \int_{S^1\times M/M} \omega$$
for $\omega \in S\mathcal{A}_R(M)$. It commutes with d and preserves $\mathcal{A}_{d=0}$. We require
$$\hat{r} \circ \hat{s} = Int \circ S\hat{r} \ ,$$
where $S\hat{r} : S\hat{h} \to S\mathcal{A}_{R,d=0}$ is induced by $\hat{r}$.
8. We require that $\hat{s} \circ Sa = a \circ Int$.

5.1.8

Definition 5.1. *A basic smooth extension of* $(\underline{h}, \underline{r})$ *is a tuple* $(\hat{h}, v, \hat{r}, a, \hat{s})$ *as in 5.1.6 which satisfies the axioms of 5.1.7.*

5.1.9

A transformation between basic smooth extensions $(\hat{h}, v, \hat{r}, a, \hat{s})$ and $(\hat{h}', v', \hat{r}', a', \hat{s})$ is a natural transformation $T : \hat{h} \to \hat{h}'$ such that $T \circ a = a'$, $v' \circ T = v$, $\hat{r}' \circ T = \hat{r}$, and $\hat{s}' \circ ST = \hat{s}$, where $ST : S\hat{h} \to S\hat{h}'$ is induced by T.

Lemma 5.2. *A transformation between basic smooth extensions of* $(\underline{h}, \underline{r})$ *is an isomorphism.*

Proof. This follows from the five lemma and 5.1.7, 4. □

5.2 The associated flat functor

5.2.1

We fix a basic smooth extension $(\hat{h}, v, \hat{r}, a, \hat{s})$ of $(\underline{h}, \underline{r})$.

Definition 5.3. *We define the graded group-valued functor Fh on $\mathcal{M}$ by*

$$0 \to Fh \to \hat{h} \xrightarrow{\hat{r}} \mathcal{A}_{R,d=0} \ .$$

We will show that Fh gives rise a cohomology theory on the category of finite CW-complexes which is a module over $\hat{h}$.

5.2.2

Lemma 5.4. *We have an exact sequence*

$$h[-1] \circ \mathcal{F} \xrightarrow{r} H_R[-1] \circ \mathcal{F} \xrightarrow{rep} Fh \xrightarrow{v} h \circ \mathcal{F} \xrightarrow{r} H_R \circ \mathcal{F}$$

Proof. It follows from 5.1.7, 2, that rep maps to Fh. The complex property is easy to see. We will show exactness at Fh and h. Exactness at the remaining places is immediate.

If $\hat{x} \in Fh(M)$ satisfies $v(\hat{x}) = 0$, then $x = a(\omega + \mathtt{im}(d))$ by 5.1.7, 4. Since $\hat{r}(\hat{x}) = 0$ we have by 5.1.7, 2. that $d\omega = 0$. Therefore $\omega + \mathtt{im}(d) \in \mathtt{im}(rep)$.

Assume that $x \in h(\mathcal{F}(M))$ satisfies $r(x)) = 0$. We choose $\hat{x}'$ such that $v(\hat{x}') = x$. By 5.1.7, 1. we have $\hat{r}(\hat{x}') = d\omega$ for some $\omega \in \mathcal{A}_R[-1](M)$. We then set $\hat{x} := \hat{x}' - a(\omega + \mathtt{im}(d))$. By 5.1.7, 2. we have $\hat{x} \in Fh(M)$. □

5.2.3

Lemma 5.5. *1. Fh is a graded module over h.*

2. We have an induced transformation $\hat{s} : SFh \to Fh[-1]$.

3. Fh is homotopy invariant.

Proof. We first show 1. Fix $M \in \mathcal{M}$. If $\hat{x} \in Fh(M)$ and $y \in h(M)$, then by 5.1.7, 4. we can choose $\hat{y} \in \hat{h}(M)$ such that $v(\hat{y}) = y$. We define the module structure by

$$y\hat{x} := \hat{y}\hat{x} \ .$$

This is well-defined. In fact, if $v(\hat{y}') = y$, then $\hat{y} - \hat{y}' = a(\omega + \mathtt{im}(d))$ for some $\omega \in \mathcal{A}_R[-1](M)$ by 5.1.7, 4. Using 5.1.7, 3. we get $\hat{y}\hat{x} - \hat{y}'\hat{x} = a(\omega)\hat{x} = a(\omega\hat{r}(\hat{x})) = 0$.

It follows from 5.1.7, 7, that $\hat{s}$ preserves Fh.

In order to prove 3. we must show that the two natural transformations $f_i : IFh \to Fh$ coincide. But this is an immediate consequence of 5.1.7, 5, since the restriction of t to IFh vanishes. □

5.2.4

Let $\mathcal{W}_{fin} \subset \mathcal{T}op$ be the category of finite CW-complexes. Any $X \in \mathcal{W}_{fin}$ is homotopy equivalent to a manifold. Using Lemma 5.5, 2. we can restrict/extend Fh uniquely to a homotopy invariant functor on $\mathcal{W}_{fin}$ with values in graded groups. We have extensions of the transformations $v : Fh \to h$, $rep : H_R[-1] \to Fh$, and $\hat{s} : SFh \to Fh[-1]$. We refrain from introducing an extra symbol for these extension.

5.2.5

Let $\mathcal{W}^+_{fin}$ be the corresponding category of pointed spaces. We define the functor Fh_{red} on $\mathcal{W}^+_{fin}$ with values in graded groups by the sequence

$$0 \to Fh_{red}(X) \to Fh(X) \to Fh(*) \ ,$$

where the second arrow is induced by the inclusion $* \to X$ of the base point.

5.2.6

Let $\Sigma : \mathcal{W}^+_{fin} \to \mathcal{W}^+_{fin}$ be the suspension functor. Then we have a natural transformation $q : S^1_\times \to \Sigma$ induced by the natural projection $S^1 \times X \to \Sigma X$. It induces a transformation $q^* : Fh_{red} \circ \Sigma \to SFh$.

We now define the suspension transformation $\sigma : Fh_{red} \circ \Sigma \to Fh_{red}[-1]$ by

$$\sigma = \hat{s} \circ q^* \ .$$

Here we must check that σ preserves the reduced subspaces.

5.2.7

We consider the fibre sequence

$$\underline{R} \to \underline{h} \stackrel{r}{\to} \underline{H_R}$$

of spectra. The h-module spectrum R classifies a module theory R^*.

5.2.8

Satz 5.6. *The pair (Fh_{red}, σ) is a generalized reduced cohomology theory on $\mathcal{W}^+_{fin}$.*

Proof. The assertion of the proposition is that the suspension transformation σ is an isomorphism, and that Fh_{red} is exact on cofibre sequences.

5.2.9

In order to see that σ is an isomorphism we apply the five lemma to the diagram

$$\begin{array}{ccccccccc} h_{red} \circ \Sigma & \stackrel{\Sigma r}{\to} & H_{R,red} \circ \Sigma & \stackrel{\Sigma rep}{\to} & Fh_{red}[1] \circ \Sigma & \stackrel{\Sigma v}{\to} & h_{red}[-1] \circ \Sigma & \stackrel{\Sigma r}{\to} & H_{R,red}[1] \circ \Sigma \\ \downarrow & & \downarrow & & \sigma \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ h_{red}[-1] & \stackrel{r}{\to} & H_{R,red}[-1] & \stackrel{rep}{\to} & Fh_{red} & \stackrel{v}{\to} & h_{red} & \stackrel{r}{\to} & H_{R,red} \end{array} .$$

There horizontal sequences are exact by Lemma 5.4. All non-named vertical arrows are the suspension isomorphisms of the corresponding cohomology theory. The diagram is commutative since the suspension transformations for the multiplicative cohomology theories h^* and H^*_R is defined by a formula analogous to 5.2.6.

5.2.10

Let $U \hookrightarrow X \to X \cup_U C(U)$ be a cofibre sequence of finite CW-complexes. We can find a homotopy equivalent sequence of smooth manifolds

$$N \stackrel{i}{\hookrightarrow} M \stackrel{p}{\hookrightarrow} Q \ ,$$

such that p is a closed embedding.

We must show that

$$Fh_{red}(Q) \stackrel{p^*}{\to} Fh_{red}(M) \stackrel{i^*}{\to} Fh(N)_{red}$$

is exact.

We will use the fact that

$$h_{red}(Q) \stackrel{p^*}{\to} h_{red}(M) \stackrel{i^*}{\to} h(N)_{red}$$

is exact.

Let $\hat{x} \in Fh_{red}(M)$ be such that $i^*\hat{x} = 0$. Let $x := v(\hat{x})$. Then $i^*x = 0$. We choose $y \in h_{red}(Q)$ such that $p^*y = x$. In fact we can choose y such that $v(y) = 0$. In order to see this we chaise in the diagram which is obtained by applying the long exact sequence

$$\dots \to R \to h \to H_R \to R^*[1] \to \dots$$

to the cofibre sequence $U \hookrightarrow X \to X \cup_U C(U)$. We shall employ the fact that $H^*_{\mathbb{R}}$ vanishes in negative degrees.

We now take $\hat{y} \in \hat{h}(Q)$ such that $v(\hat{y}) = y$. We choose a form $\alpha \in \mathcal{A}_R(Q)$ such that $d\alpha = \hat{r}(\hat{y})$. Replacing $\hat{y}$ by $\hat{y} - a(\alpha + \mathtt{im}(d))$ we can assume that $\hat{y} \in Fh_{red}(Q)$.

We can choose a closed form $\beta \in \mathcal{A}_{R,d=0}(M)$ such that $p^*\hat{y} - \hat{x} = a(\beta + \mathtt{im}(d))$. We choose a smooth extension of β to Q denoted by the same symbol. The form $d\beta$ is supported on $Q \setminus M$ and represents a class $b \in H_R(Q, M)$. We will show that this class vanishes.

Note that $b = \delta_{M \subset Q}\{\beta_{|M}\}$, where $\delta_{M \subset Q}$ is the boundary operator in the cohomology of the pair $M \subset Q$.

Using the fact that our sequence of manifolds approximates a cofibre sequence we can identify

$$H_R(Q,N) \cong H_R(Q,M) \oplus H_{R,red}(\Sigma N) \ ,$$

where the inclusion $H_R(Q,M) \hookrightarrow H_R(Q,N)$ is the obvious restriction map and the image of the boundary operator $\delta_{N\subset Q}$ is the second summand. We get the equation $b_{|(Q,N)} = \delta_{N\subset Q}\{\beta_{|N}\}$ which shows that both sides are trivial. Let $\gamma \in \mathcal{A}_R(Q)$ be a form supported on $Q \setminus M$ such that $d\gamma = d\beta$. We replace β by $\beta - \gamma$. Then we can assume that $d\beta = 0$.

We can now replace $\hat{y}$ by $\hat{y} - a(\beta + \mathtt{im}(d))$. Then $p^*\hat{y} = \hat{x}$. □

5.2.11

The cohomology theory R^* fits into an exact sequence

$$h[-1] \circ \mathcal{F} \xrightarrow{r} H_R[-1] \circ \mathcal{F} \xrightarrow{j} R \xrightarrow{i} h \circ \mathcal{F} \xrightarrow{r} H_R \circ \mathcal{F}$$

which is similar to that of Lemma 5.4. In particular, any natural transformation between R^* and Fh^* is automatically an isomorphism. In the following let us indicate how one could try to construct such a transformation

$$T : R^*_{red} \to Fh^*_{red} \ .$$

Let us pretend that the homotopy fibration sequence

$$\Omega^{\infty-n}\underline{R} \xrightarrow{i} \Omega^{\infty-n}\underline{h} \xrightarrow{\Omega^{\infty-n}v} \Omega^{\infty-n}\underline{H_R}$$

is a fibre bundle of smooth manifolds.

5.2.12

There are universal elements $u \in h^n(\Omega^{\infty-n}\underline{h})$ and $z \in H^n_R(\Omega^{\infty-n}\underline{H_R})$ classified by the identity maps. We choose $\hat{u} \in \hat{h}^n(\Omega^{\infty-n}\underline{h})$ such that $v(\hat{u}) = u$ and a form $\omega \in \mathcal{A}^n_{R,d=0}(\Omega^{\infty-n}\underline{H_R})$ such that $\{\omega\} = z$. Finally we choose a form $\beta \in$

$\mathcal{A}^{n-1}_R(\Omega^{\infty-n}\underline{h})$ such that $d\beta = \hat{r}(\hat{u}) - (\Omega^{\infty-n}v)^*\omega$. Then we define the universal class $\hat{c} \in Fh(\Omega^{\infty-n}\underline{R})$ by

$$\hat{c} := i^*(\hat{u} - a(\beta)) \ .$$

It is easy to check that this class is indeed flat.

5.2.13

We now define the transformation T by $T_X([a]) = a^*\hat{c}$, where $[a] \in [X, \Omega^{\infty-n}\underline{R}] \cong R^n_{red}(X)$.

It follows from the homotopy invariance of Fh^* that T is well-defined. We must show that $i = v \circ T$ and $T \circ j = u$. The first relation is obvious since $v(\hat{c}) = i^*u$. So let us discuss the second identity.

5.2.14

We choose a lifting

$$\begin{array}{ccc} \Omega\Omega^{\infty-n}\underline{H_R} & \stackrel{J}{\to} & \Omega^{\infty-n}\underline{R} \\ l\downarrow & & i\downarrow \\ P\Omega^{\infty-n}\underline{H_R} & \stackrel{m}{\to} & \Omega^{\infty-n}\underline{h} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega^{\infty-n}\underline{H_R} & = & \Omega^{\infty-n}\underline{H_R} \end{array} \ .$$

The space $\Omega\Omega^{\infty-n}\underline{H_R}$ classifies H^{n-1}_R. The transformation j is induced by J.

5.2.15

Let $y \in H^{n-1}_R(M)$ be classified by $f : M \to \Omega\Omega^{\infty-n}\underline{H_R}$. Then

$$T \circ j(y) = (J \circ f)^*\hat{c} = f^*l^*m^*(\hat{u} - a(\beta)) \ .$$

Let H be the natural zero homotopy of m. Then we have

$$\begin{aligned} m^*(\hat{u} - a(\beta)) &= a\left(\int_{I\times\Omega^{\infty-n}\underline{H_R}/\Omega^{\infty-n}\underline{H_R}} H^*(\hat{r}(\hat{u}) - d\beta)\right) \\ &= a\left(\int_{I\times\Omega^{\infty-n}\underline{H_R}/\Omega^{\infty-n}\underline{H_R}} H^*(\Omega^{\infty-n}v)^*\beta\right) \ . \end{aligned}$$

The closed form $l^* \int_{I\times\Omega^{\infty-n}\underline{H_{\mathbb{R}}}/\Omega^{\infty-n}\underline{H_{\mathbb{R}}}} H^*(\Omega^{\infty-n}v)^*\beta$ represents the transgression of the universal class z along the left fibration which is just the universal class $\tilde{z} \in H^{n-1}(\Omega\Omega^{\infty-n}\underline{H_{\mathbb{R}}})$. We thus have $T \circ j(y) = rep(f^*\tilde{z}) = rep(y)$. $\square$

5.2.16

This proof fails since

$$\Omega^{\infty-n}\underline{R} \xrightarrow{i} \Omega^{\infty-n}\underline{h} \xrightarrow{\Omega^{\infty-n}v} \Omega^{\infty-n}\underline{H_R}$$

is not a bundle of manifolds. In order to correct this one may try to approximate it by a diagram of bundles of smooth manifolds. If we take CW-approximations of the infinite loop spaces then the skeleta are not finite in general. Therefore we shall need a non-directed diagram for which the existence of a universal class is not granted.

6 Glatte Erweiterungen von Kohomologietheorien

7 Glatte Erweiterung von Bordismustheorien