Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2

Ulrich Bunke

11. Aufgabenblatt

Abgabe: 30.06.05

Aufgabe 1. *Klassifizieren Sie die quadratischen Funktionen auf vier-dimensionalen affinen Räumen über* $\mathbb{F}_5^4$ *bis auf affine Äquivalenz. Geben Sie genau einen Vertreter jeder Äquivalenzklasse an.*

Aufgabe 2. *Sei* Q *eine nichtverschwindende symmetrische Bilinearform über* $\mathbb{R}$ *und* $\mathtt{Conf}(Q)$ *die konforme Gruppe von* Q*. Sei* $C : \mathtt{Conf}(Q) \to \mathbb{R}^*$ *durch* $C(\phi)Q = \phi^* Q$, $\phi \in \mathtt{Conf}(Q)$ *gegeben. Zeigen Sie, daß* $\mathtt{im}(C) = \mathbb{R}^*$ *genau dann gilt, wenn* $\mathtt{sign}(Q) = 0$ *ist.*

Aufgabe 3. *Bestimmen Sie alle projektiven Hyperebenen im projektiven Raum* $P(\mathbb{F}_2^3)$ *und ihre paarweisen Durchschnitte.*

Aufgabe 4. *Sei* $\dim(V) = m$ *und* $n \geq 0$*. Bestimmen Sie* $\dim O_{P(V)}(n)$*.*

Aufgabe 5. *Sei* $\dim(V) = 3$ *und* $x, y, z \in P(V)$*. Zeigen Sie, daß es mindestens eine projektive Hyperebene* $P(U) \subset P(V)$ *mit* $x, y, z \in P(U)$ *gibt. Unter welchen Umständen ist diese Hyperebene eindeutig bestimmt.*

Aufgabe 6. *Wir betrachten die quadratischen Funktionen* $f(x,y) := x^2 + y^2 - 1$, $g(x,y) := x^2 - y^2 - 1$, $h(x,y) := x^2 + y$ *auf* $\mathbb{R}^2$*. Bestimmen Sie die Projektivierungen* $\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{h} \in O_{P(\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2)}(?)$*. Zeigen Sie weiter, daß es Projektivitäten* $\phi, \psi \in \mathtt{Aut}(\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2)$ *gibt, so daß* $\phi^* g \sim f$ *und* $\psi^* h \sim f$ *(*$\sim$ *bedeutet proportional mit einem nichttrivialem Faktor).*