Lineare Algebra und Analytische Geometrie

Ulrich Bunke

10. Aufgabenblatt

Abgabe: 06.01.05

Aufgabe 1. *Wir betrachten den Vektorraum K^{S_5}. Für $\sigma \in S_5$ definieren wir die Abbildung $\phi(\sigma) \in \mathtt{Hom}(K^{S_5}, K^{S_5})$, $(\phi(\sigma)f)(\theta) := f(\sigma^{-1}\theta\sigma)$. Zeigen Sie:*

1. *$\phi(\sigma)$ ist wirklich eine lineare Abbildung.*
2. *Es gilt $\phi(\sigma\sigma') = \phi(\sigma)\phi(\sigma')$.*

Sei $A \subset S_5$ die Menge derjenigen Elemente, welche sich als Zyklus der Länge 5 schreiben lassen. Bestimmen Sie $\dim(< A >)$. Zeigen Sie weiter, daß $\phi(\sigma)(< A >) =< A >$ für alle $\sigma \in S_5$ gilt.

Aufgabe 2. *Sei $\phi : K[x]^{\leq n} \to K[x]^{\leq n}$ durch die 2te Ableitung gegeben. Bestimmen Sie die Dimension des Bildes von ϕ in den Fällen $K = \mathbb{Q}$ und $K = \mathbb{F}_3$.*

Aufgabe 3. *Sei $A \in \mathtt{Mat}(4,4,\mathbb{F}_3)$ durch*

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Wir betrachten die durch A definierte lineare Abbildung $\phi := A \bullet \cdots : \mathbb{F}_3 \to \mathbb{F}_3$. Bestimmen Sie die Dimension des Bildes von ϕ.

Aufgabe 4. *Sei K ein Körper und $K[x,y] := K[x][y]$ der Ring der Polynome in x und y. Ein typisches Element von $f \in K[x,y]$ schreiben wir in der Form $f = \sum_{i,j=0}^{\infty} f_{i,j} x^i y^j$, wobei verabredungsgemäß nur endlich viele der Koeffizienten $f_{i,j} \in K$ ungleich Null sind. Wir definieren den Grad eines Monoms durch $\deg(x^i y^j) := i + j$. Sei $K[x,y]^n \subset K[x,y]$ der Teilraum derjenigen Polynome in x und y, welche Linearkombinationen von Monomen des Grades n sind.*

1. *Zeigen Sie, daß* $\{x^i y^{n-i} | i = 0, \ldots, n\}$ *eine Basis von* $K[x,y]^n$ *ist.*

2. *Seien* $a, b, c, d \in K$. *Wir definieren* $\phi : K[x,y]^n \to K[x,y]$ *durch*

$$\phi(f)(x,y) := f(ax+by, cx+dy) \ .$$

   Zeigen Sie, daß $\mathtt{im}(\phi) \subset K[x,y]^n$ *ist.*

3. *Zeigen Sie, daß* $\phi : K[x,y]^n \to K[x,y]^n$ *linear ist.*

4. *Geben Sie die Matrix von* $\phi : K[x,y]^n \to K[x,y]^n$ *in der obigen Basis in den Fällen* $n = 2$ *und* $n = 4$ *an.*

Aufgabe 5. *Sei* $\deg : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q}[x]$ *die Abbildung* $\deg(f)(x) := x f'(x)$.

1. *Bestimmen Sie für jedes* $n \in \mathbb{Z}$ *alle Lösungen der Gleichung* $\deg(f) = nf$.

2. *Möge* $\phi \in \mathtt{Hom}(\mathbb{Q}[x], \mathbb{Q}[x])$ *der Gleichung* $[\phi, \deg] = \phi$ *genügen (wobei* $[\phi, \deg] := \phi \circ \deg - \deg \circ \phi$ *ist). Zeigen Sie, daß* ϕ *lokal nilpotent ist, d.h. für jedes* $f \in \mathbb{Q}[x]$ *ein* $n \in \mathbb{N}$ *mit* $\phi^n(f) = 0$ *existiert.*

3. *Beschreiben Sie die Menge aller* ϕ *in 2.*

Wir sieht die Antwort zu 1. aus, wenn man $\mathbb{Q}$ *durch* $\mathbb{F}_3$ *ersetzt? Bleibt die Behauptung von* 2. *richtig?*

Aufgabe 6. *Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichgung* $f'' - f = 0$ *in* $\mathbb{Q}[[x]]$. *Zeigen Sie, daß diese Menge ein Untervektorraum von* $\mathbb{Q}[[x]]$ *ist. Bestimmen Sie dessen Dimension. Welche dieser Lösungen erfüllen* $f(2x) = f(x)^2$*?*