Lineare Algebra und Analytische Geometrie

Ulrich Bunke

11. Aufgabenblatt

Abgabe: 13.01.05

Aufgabe 1. *Sei V ein Vektorraum und $A \subset V$ eine endliche linear unabhängige Teilmenge. Sei $b := \sum_{a \in A} a$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:*

1. $b \notin A$
2. $A \cup \{b\}$ *ist linear abhängig.*
3. *Ist $C \subset A \cup \{b\}$ und $|C| = |A|$, dann ist C linear unabhängig.*

Aufgabe 2. *Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{F}_7^3$ und die Teilmenge $A := \{e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3\}$, wobei $(e_i)_{i=1,2,3}$ die Standardbasis von $\mathbb{F}_7^3$ bezeichnet.*

1. *Zeigen Sie, daß A eine Basis von $\mathbb{F}_7^3$ ist.*
2. *Zeigen Sie, daß der duale Raum $(\mathbb{F}_7^3)'$ eine eindeutig bestimmte Basis $(u_a)_{a \in A}$ mit der Eigenschaft*
$$u_a(b) = \delta_{a,b}\ , \quad a, b \in A$$
besitzt (so eine Basis nennt man auch die zu A duale Basis).
3. *Geben Sie diese Basis an, indem Sie die Werte $u_a(e_i)$ für alle $a \in A$ und $i = 1, 2, 3$ angeben.*

Aufgabe 3. *Sei V ein K-Vektorraum und $A \subset V$ linear unabhängig. Sei weiter $b := \sum_{a \in A} \lambda_a a \in <A>$ eine Linearkombination von Elementen von A. Zeigen Sie folgende Aussage: Die Familie $(a - b)_{a \in A}$ ist genau linear unabhängig, wenn $\sum_{a \in A} \lambda_a \neq 1$ gilt.*

Aufgabe 4. *Sei $f : A \to B$ eine Abbildung zwischen Mengen und K ein Körper. Wir definieren $f^* : K^B \to K^A$ durch $f^*(\phi)(a) := \phi(f(a))$ für alle $a \in A$, wobei $\phi \in K^B$ ist.*

1. *Zeigen Sie, daß $f^* : K^B \to K^A$ eine lineare Abbildung ist.*

2. *Zeigen Sie, daß sich f^* zu einer linearen Abbildung von $< B >$ nach $< A >$ einschränkt, wenn $|f^{-1}(\{b\})| < \infty$ für alle $b \in B$ gilt (man sagt dazu auch, f habe endliche Fasern).*

3. *Sei $g : B \to C$ eine weitere Abbildung von Mengen. Zeigen Sie, daß $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ gilt.*

Aufgabe 5. *Sei $f : A \to B$ eine Abbildung zwischen Mengen. Die Abbildung $A \xrightarrow{f} B \to < B > \to K^B$ hat eine lineare Ausdehnung $\overline{f} :< A > \to K^B$.*

1. *Zeigen Sie, daß $\overline{f}(\psi)(b) = \sum_{f(a)=b} \psi(a)$ für alle $b \in B$ gilt, wobei $\psi \in < A >$ ist.*

2. *Zeigen Sie, daß $\overline{f}(< A >) \subset < B >$ gilt.*

3. *Zeigen Sie, daß sich $\overline{f}$ zu einer Abbildung $f_* : K^A \to K^B$ durch die Formel 1. ausdehnen läßt, wenn f endliche Fasern hat (siehe 2. der Aufgabe 4 für eine Erklärung dieser Bedingung).*

4. *Möge f endliche Fasern haben. Beschreiben Sie die Abbildungen $f^* \circ f_* \in \mathtt{End}(K^B)$ und $f_* \circ f^* \in \mathtt{End}(K^A)$ möglichst explizit.*

Aufgabe 6. *Wir betrachten die Standardbasis $A := \{e_i | i = 1,2,3,4\}$ von $\mathbb{R}^4$. Wir betrachten weiter die Familie $(a_i)_{i=1,\dots,4}$, welche durch $a_1 := (1,2,3,4)^t, a_2 := (2,3,4,5)^t, a_3 := (3,5,7,9)^t, a_4 := (5,5,5,5)^t$ gegeben ist.*

1. *Bestimmen Sie die Dimension des von $(a_i)_{i=1,\dots,4}$ in $\mathbb{R}^4$ erzeugten Unterraumes.*

2. *Bestimmen Sie die größte Zahl n derart, daß $(a_i)_{i=1,\dots,n}$ linear unabhängig ist.*

3. *Ergänzen Sie $(a_i)_{i=1,\dots,n}$ durch Elemente der Standardbasis zu einer Basis B (Die Zahl n wurde in 2.bestimmt).*

4. *Bestimmen Sie die Basiswechselmatrizen $M(A,B)$ und $M(B,A)$.*

5. *Bestimmen Sie die Koordinaten von a_4 bezüglich B.*