# Algebra 1

Ulrich Bunke

## 10. Aufgabenblatt

Abgabe: 10.01.06

**Aufgabe 1** *Sei $R$ ein kommutativer Ring und $S \subset R$ multiplikativ abgeschlossen. Sei $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von $R$-Moduln. Zeigen Sie, daß die Familie der kanonischen Abbildungen $(M_i \to S^{-1}M_i \to \bigoplus_{j\in I} S^{-1}M_j)_{i\in I}$ einen Isomorphismus*

$$S^{-1}(\bigoplus_{i\in I} M_i) \cong \bigoplus_{i\in I} S^{-1}M_i$$

*induziert.*

*Zeigen Sie weiter, daß die Familie der kanonischen Abbildungen $(\prod_{j\in I} M_j \to M_i \to S^{-1}M_i)_{i\in I}$ eine Abbildung $S^{-1}(\prod_{i\in I} M_i) \to \prod_{i\in I} S^{-1}M_i$ induziert, welche jedoch im allgemeinen kein Isomorphismus ist. (Hinweis: Betrachten Sie für den letzten Teil $R := \mathbb{Z}$, $I := \mathbb{N}$, $M_i := \mathbb{Z}$, $i \in \mathbb{N}$ und $S := \{1, 3, 3^2, \dots, 3^n, \dots\}$. )*

**Aufgabe 2** *Finden Sie einen Ring $R$, einen $R$-Modul $M$ und einen Untermodul $N \subset M$, so daß $M$ unzerlegbar ist, aber $M/N$ nicht.*

**Aufgabe 3** *Sei $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathtt{Mat}_n(\mathbb{Z})$ und $w_i$ die $i$'te Spalte von $A$ für $i = 1, \dots, n$. Wir betrachten den Untermodul $N := \mathbb{Z}w_1 + \dots + \mathbb{Z}w_n \subseteq \mathbb{Z}^n$. Zeigen Sie, daß $\mathbb{Z}^n/N$ genau dann endlich ist, wenn $\det(A) \neq 0$ gilt. Zeigen Sie weiter, daß unter dieser Voraussetzung $|\det(A)| = |\mathbb{Z}^n/N|$ gilt.*

**Aufgabe 4** *Sei $N \subset \mathbb{Z}^3$ der von $(4, 5, 6)$ und $(9, 8, 7)$ erzeugte Untermodul. Bestimmen Sie den Rang von $\mathbb{Z}^3/N$ und die Ordnung von des Torsionsuntermodul $T(\mathbb{Z}^3/N)$.*

**Aufgabe 5** *Sei $R$ ein Integritätsbereich und $M$ ein $R$-Modul. Zeigen Sie, daß*

$$T(M/T(M)) \cong \{0\}$$

*gilt.*

**Aufgabe 6** *Sei $R$ ein Hauptidealring, $M$ ein freier $R$-Modul von endlichem Rang und $N \subset M$. Zeigen Sie, daß $N$ genau dann ein direkter Summand von $M$ ist, wenn $N \cap aM = aN$ für alle $a \in R$ gilt.*